Seminario Iberoamericano de
Análisis Matemático y Matemática Aplicada

EL TEOREMA DE APROXIMACIÓN POLINOMIAL DE WEIERSTRASS
Algunas de sus demostraciones

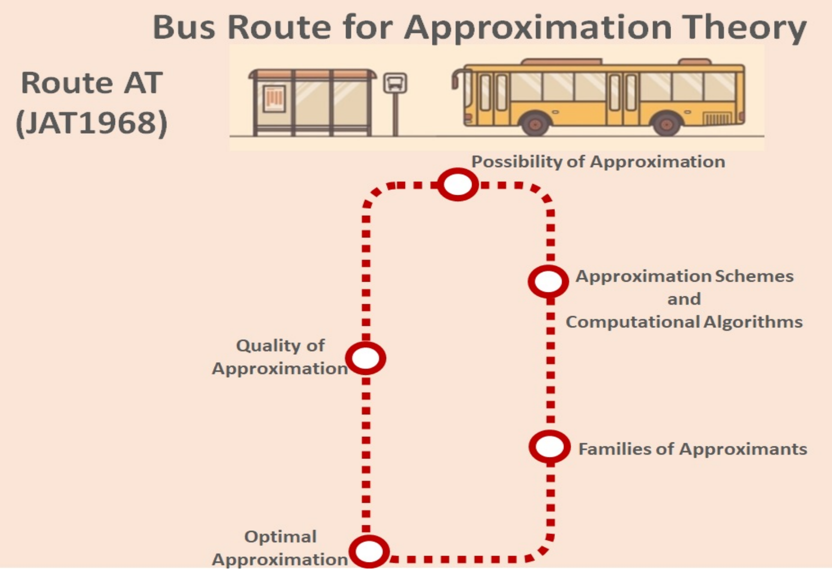
Yamilet Quintana

Universidad Simón Bolívar

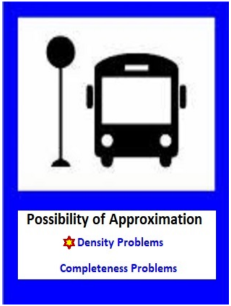
Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897)

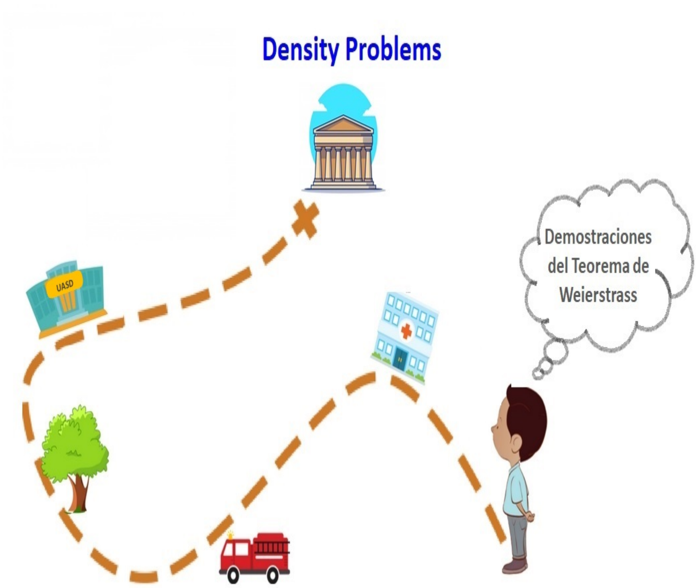
El famoso y célebre teorema de aproximación de Weierstrass caracteriza al conjunto de funciones continuas en un intervalo compacto mediante aproximación uniforme por polinomios algebraicos. Este teorema fue el primer resultado significativo sobre teoría de aproximación de funciones a valores reales definidas sobre subconjuntos de $\mathbb{R}$, y tiene un rol clave en el desarrollo de la teoría de aproximación general. En esta charla examinaremos brevemente varias pruebas de este resultado.

Áreas de estudio en Teoría de Aproximación: La ruta JAT



Áreas de estudio en Teoría de Aproximación: La ruta JAT





Nuestro Plan

Enfoque de Weierstrass: **IS / EC (Fourier) / VC (Cauchy-Laurent)**

Enfoque IS:

- Picard (1891).
- Fejér (1900).
- Landau (1908).
- De la Valleé Poussin (1912).

Enfoque AFP:

- Runge (1885-86).
- Phragmén (1886).
- Lebesgue (1898).
- Mittag-Leffler (1900).
- Lerch (1892).

Enfoque Complemento W-IS-AFP:

- Lerch (1903).
- Volterra (1897).
- Bernstein (1912-13).

Enfoque de Weierstrass

Teorema W (1885)

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y acotada. Consideremos una función $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, acotada, no negativa, par e integrable Riemann (integral impropia).

Si para $k > 0$ y $x \in \mathbb{R}$ definimos

$$F(x,k) = \frac{1}{2k\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du \quad \text{con} \quad \omega = \int_{0}^{\infty} \psi(u)du,$$

entonces podemos concluir que

$$\lim_{k \to 0^+} F(x,k) = f(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Además, esta convergencia es uniforme sobre cualquier intervalo finito.

(1) significa que Weierstrass basó su demostración en el método IS

K. Weierstraß, Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen, Sitzungsber. Akad. Berlin, (1885), pp. 633–639, 789–805.

Enfoque de Weierstrass

1. Weierstrass publicó el **Teorema W** a la edad 70 años.
2. Título del artículo: *"On the possibility of giving an analytic representation to an arbitrary function of real variable"*. 1885 $\dashrightarrow$ 1886 $\dashrightarrow$ 1903:

   K. Weierstrass, Sur la possibilité d'une représentation analytique des fonctions dites arbitraires d'une variable réelle, J. Math. Pure Appl. 2 (1886), 105–113, 115–138. [Es la traducción del artículo de 1885, y también apareció en dos partes, y en números consecutivos, aunque con el mismo título].

   K. Weierstraß, Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen. In: K. Weierstraß, Mathematische Werke, vol. 3, pp. 1–37, Mayer & Müller, Berlin, 1903. [Versión extendida del del artículo de 1885, con 10 páginas adicionales.]

3. En la parte final del artículo [1885] demostró la densidad de los polinomios trigonométricos en el espacio de las funciones continuas 2π-periódicas $\tilde{C}[0, 2\pi]$.

Notación de Weierstrass:

- Para $-\infty \leq a < b \leq \infty$, Weierstrass denotó por $f(a \ldots b)$ un valor de f tomado entre a y b.
- Para mostrar (1) Weierstrass utilizó la continuidad de f en $x \in \mathbb{R}$ y aplicó el TVM del cálculo integral a f para mostrar que

$$\begin{aligned} F(x,k) - f(x) =& \frac{1}{2\omega}[f(-\infty \ldots x-\delta) + f(x+\delta \ldots \infty) - 2f(x)] \int_{\frac{\delta}{k}}^{\infty} \psi(\nu) d\nu \\ &+ \frac{1}{2\omega}[f(x-\delta \ldots x) + f(x \ldots x+\delta) - 2f(x)] \int_0^{\frac{\delta}{k}} \psi(\nu) d\nu, \end{aligned}$$

para algún $\delta > 0$ y $\omega = \int_0^{\infty} \psi(u) du$.

Enfoque de Weierstrass

Teorema W1 (1903)

Dada $f \in C(\mathbb{R})$. Entonces existe una sucesión $f_1, f_2, \ldots$ de funciones enteras para la cual

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x),$$

para cada $x \in \mathbb{R}$. Además la convergencia de la serie anterior es uniforme sobre cualquier intervalo finito.

1. El enunciado del **Teorema W1** nos sugiere el interés permanente de Weierstrass en funciones de variable compleja y desarrollos en series de potencias.
2. La hipótesis "f acotada" es removida del enunciado.
3. No menciona que las funciones f_i son polinomios.

Idea de la demostración del Teorema W:

- Dados $k > 0$ y $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F(x,k) - f(x) =& \frac{1}{2k\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du - f(x) \\ =& \frac{1}{2\omega}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\psi\left(\frac{u-x}{k}\right) \frac{du}{k} - 2\omega f(x)\right] \\ =& \frac{1}{2\omega}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\psi\left(\frac{u-x}{k}\right) \frac{du}{k} - 2f(x)\int_{0}^{\infty} \psi(\nu)\, d\nu\right]. \end{aligned}$$

- Para descomponer el dominio de integración como Weierstrass procederemos de la forma siguiente: como f es continua en x, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(u) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{siempre que } |u - x| < \delta.$$

- Note que $|u - x| < \delta \Leftrightarrow -\frac{\delta}{k} < \frac{u-x}{k} < \frac{\delta}{k}$.

  Por lo que haciendo el cambio de variables $t = \frac{u-x}{k}$, obtenemos que $kt + x \in (-\delta + x, x + \delta)$ y:

Idea de la demostración del Teorema W:

$$
\begin{aligned}
F(x,k) - f(x) =& \frac{1}{2\omega}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(kt+x)\psi(t)\,dt - 2f(x)\int_0^{\infty}\psi(\nu)\,d\nu\right] \\
=& \frac{1}{2\omega}\left[\int_{-\infty}^{-\frac{\delta}{k}} f(kt+x)\psi(t)\,dt + \int_{\frac{\delta}{k}}^{\infty} f(kt+x)\psi(t)\,dt\right] \\
&+ \frac{1}{2\omega}\left[\int_{-\frac{\delta}{k}}^{0} f(kt+x)\psi(t)\,dt + \int_0^{\frac{\delta}{k}} f(kt+x)\psi(t)\,dt\right] \\
&- \frac{1}{2\omega}\left[2f(x)\int_0^{\frac{\delta}{k}}\psi(\nu)\,d\nu + 2f(x)\int_{\frac{\delta}{k}}^{\infty}\psi(\nu)\,d\nu\right].
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{-\frac{\delta}{k}} f(kt+x)\psi(t)\,dt &= -\int_{-\frac{\delta}{k}}^{-\infty} f(kt+x)\psi(t)\,dt = \int_{-\frac{\delta}{k}}^{-\infty} f(kt+x)\psi(t)\,(-dt) \\
&= \int_{\frac{\delta}{k}}^{\infty} f(x-sk)\psi(-s)\,ds = \int_{\frac{\delta}{k}}^{\infty} f(x-sk)\psi(s)\,ds.
\end{aligned}
$$

Idea de la demostración del Teorema W:

Luego,

$$F(x,k) - f(x) = \frac{1}{2\omega}\left[\int_{\frac{\delta}{k}}^{\infty}[f(x-kt)+f(x+kt)-2f(x)]\,\psi(t)\,dt\right] + \frac{1}{2\omega}\left[\int_0^{\frac{\delta}{k}}[f(x-kt)+f(x+kt)-2f(x)]\,\psi(t)\,dt\right].$$

Y en consecuencia,

$$|F(x,k) - f(x)| \leq C\varepsilon,$$

donde $C > 0$ es una constante.

- Para mostrar que (1) implica el **Teorema W1**, Weierstrass tenía que encontrar funciones $F(x,k)$ apropiadas que fueran más regulares que f (que sólo es continua), es decir, funciones $F(x,k)$ que se puedan desarrollar en series de potencias.

Idea de la demostración del Teorema W1:

- Weierstrass mostró en detalle en 1885, y más brevemente en sus conferencias de 1886, que existen funciones ψ que permiten construir la F apropiada. Dio como ejemplo a $\psi(u) = e^{-u^2}$.

  En ambas ocasiones dijo:

  “Hay infinitas funciones de este tipo”

- Cuando tomamos $\psi(u) = e^{-u^2}$:

$$
\begin{aligned}
F(x,k) &= \frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-\left(\frac{u-x}{k}\right)^2} du = \frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-\left(\frac{x-u}{k}\right)^2} du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u) \frac{e^{-\left(\frac{u}{k}\right)^2}}{k\sqrt{\pi}} du \\
&= (f * \gamma_k)(x), \quad \text{donde} \quad \gamma_k(x) = \frac{e^{-\left(\frac{u}{k}\right)^2}}{k\sqrt{\pi}}.
\end{aligned}
$$

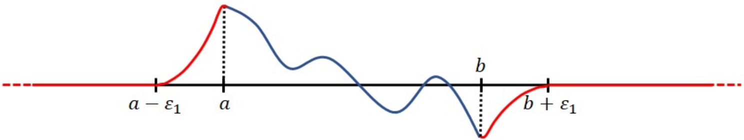
Idea de la demostración del Teorema W1:

- Y podemos escribir:

$$F(x,k) - f(x) = \frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [f(x-u) - f(x)]\, e^{-\left(\frac{u}{k}\right)^2} du.$$

- Ahora si $f \in C[a,b]$, para $\varepsilon_1 > 0$ definimos una extensión continua de f sobre $\mathbb{R}$, $\tilde{f}$, tal que $\tilde{f} \equiv 0$ en $\mathbb{R} \setminus (a-\varepsilon_1, b+\varepsilon_1)$ de la siguiente manera:

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} \frac{f(a)}{e^{\varepsilon_1}-1} e^{x-a+\varepsilon_1} - \frac{f(a)}{e^{\varepsilon_1}-1}, & \text{si } x \in [a-\varepsilon_1, a), \\ f(x), & \text{si } x \in [a,b], \\ \frac{f(b)}{e^{-\varepsilon_1}-1} e^{x-b-\varepsilon_1} + \frac{f(b)}{1-e^{\varepsilon_1}}, & \text{si } x \in (b, b+\varepsilon_1], \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$



Idea de la demostración del Teorema W1:

- Además, $\tilde{f}$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}$, por lo que dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|\tilde{f}(x-u) - \tilde{f}(x)| < \varepsilon$, siempre que $|u| < \delta$. Por lo tanto,

$$|F(x,k) - \tilde{f}(x)| \leq \varepsilon \int_{|u|<\delta} |\gamma_k(u)| du + 2\|\tilde{f}\|_\infty \int_{|u|\geq\delta} |\gamma_k(u)| du.$$

Luego,

$$\|F(\cdot\,,k) - \tilde{f}\|_\infty \to 0, \quad \text{si} \;\; k \to 0^+.$$

- Ya que

$$F(x,k) = (\tilde{f} * \gamma_k)(x), \quad \text{con} \quad \gamma_k(x) = \frac{e^{-\left(\frac{u}{k}\right)^2}}{k\sqrt{\pi}},$$

y $\tilde{f}$ tiene soporte compacto, podemos sustituir γ_k por su desarrollo de Maclaurin, por lo que $F(x,k)$ es una función entera.

Idea de la demostración del Teorema W1:

- Así,

$$
\begin{aligned}
F(x,k) &= (\tilde{f} * \gamma_k)(x) = \int_{a-\varepsilon_1}^{b+\varepsilon_1} \tilde{f}(x-u)\gamma_k(u)du \\
&= \frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{a-\varepsilon_1}^{b+\varepsilon_1} \tilde{f}(x-u) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{k^{2n} n!} u^{2n} \right] du \\
&= \frac{1}{k\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{k^{2n} n!} \int_{a-\varepsilon_1}^{b+\varepsilon_1} \tilde{f}(x-u) u^{2n} du \\
&= \frac{1}{k\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{k^{2n} n!} Q_{2n}(x).
\end{aligned}
$$

- Definiendo $P_n(x)$ como la n-ésima suma parcial de la serie de Maclaurin de $F(x,k)$, obtenemos

$$\|P_n - \tilde{f}\|_\infty \to 0, \quad \text{si} \quad n \to \infty.$$

Denotando por

$$\mathbb{P} = \mathrm{span}\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\},$$

una consecuencia inmediata del **Teorema W1** es:

Teorema W2 (1885)

Sea $f \in C[a,b]$. Dado $\varepsilon > 0$, existe un polinomio algebraico $p \in \mathbb{P}$ tal que

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon, \quad \text{para todo } \; x \in [a,b].$$

$\boxed{\mathbb{P} \text{ es denso en } C[a,b]}$

Sobre la motivación de Weierstrass:

Fourier: Ecuación del calor

- En 1822 el trabajo de J. Fourier sobre la propagación del calor finalmente había sido aceptado, y para ese momento tanto los resultados físicos como matemáticos de su teoría gozaban de una aceptación general.
- Weierstrass tenía un conocimiento profundo sobre la solución de la ecuación del calor:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(x,t) = k\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x,t), \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{2}$$

  y condición inicial

$$\phi(x,t) \to G(x) \text{ si } t \to 0^+.$$

Sobre la motivación de Weierstrass:

Fourier: Ecuación del calor

- Este conocimiento le permitió saber que si $G : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es una función acotada, uniformemente continua, y si $\phi(x,t)$ está dada por

$$\phi(x,t) = G * \left[\frac{1}{\sqrt{2kt}} E\left(\frac{x}{\sqrt{2kt}} \right) \right],$$

donde $E(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2}$, entonces ϕ es una función infinitamente diferenciable en $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ tal que

$$\phi(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y) e^{-\frac{y^2}{2kt}} dy, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty),$$

y

1. $\frac{\partial \phi}{\partial t}(x,t) = k \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x,t)$.
2. $\phi(x,t) \to G(x)$ uniformemente en x si $t \to 0^+$.

Sobre la motivación de Weierstrass:

Fourier: Ecuación del calor

- Note que la función

$$E_k(x) = \frac{1}{k}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{k^2x^2}{2}}$$

puede ser aproximada uniformemente por los polinomios

$$P_n(x) = \frac{1}{k\sqrt{2\pi}} \sum_{r=0}^{n} \frac{\left(-\frac{k^2x^2}{2}\right)^r}{r!}, \quad \deg\left(P_n\right) = 2n. \tag{3}$$

- Luego, la sucesión de polinomios $\left(G * P_n\right)(x),\ n \geq 0$, satisface

$$\left(G * P_n\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \left(G * E_k\right).$$

Densidad de los polinomios trigonométricos en $\tilde{C}[0, 2\pi]$

Notación:

$$\tilde{C}[a, b] \quad \longmapsto \text{ funciones en } C[a, b] \text{ tales que } f(a) = f(b).$$

Cada $f \in \tilde{C}[a, b]$ puede ser considerada como la restricción de una función $(b - a)$-periódica en $C(\mathbb{R})$

Polinomios trigonométricos:

$$T = \text{span}\{1, \operatorname{sen} x, \cos x, \ldots, \operatorname{sen} nx, \cos nx, \ldots\}.$$

Densidad de los polinomios trigonométricos en $\tilde{C}[0, 2\pi]$

Variable Compleja: Cauchy-Laurent

- En la parte final de su artículo (1885), Weierstrass consideró una función ψ, entera, no negativa, integrable y par sobre $\mathbb{R}$, con la siguiente propiedad:

1. Dada $f \in \tilde{C}[0, 2\pi]$, las funciones

$$F(z,k) = \frac{1}{2k\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\psi\left(\frac{u-z}{k}\right) du, \quad \text{con} \quad \omega = \int_0^{\infty} \psi(x)dx,$$

son enteras (en la variable $z \in \mathbb{C}$) para cada $k > 0$, y satisfacen

$$\lim_{k \to 0^+} F(x,k) = f(x), \quad \text{uniformemente sobre } [0, 2\pi].$$

- Como f es 2π-periódica:

$$F(z+2\pi, k) = \frac{1}{2\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(ks+z+2\pi)\psi(s)\, ds = \frac{1}{2\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(ks+z)\psi(s)\, ds$$
$$= F(z,k).$$

Densidad de los polinomios trigonométricos en $\tilde{C}[0, 2\pi]$

Variable Compleja: Cauchy-Laurent

- Para $k > 0$ fijado, consideremos la función

$$G(z, k) = F\left(\frac{\log z}{i}, k\right),$$

como $F(z, k)$ es 2π-periódica, $G(z, k)$ es univaluada y analítica en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- Luego, G tiene un desarrollo en series de Laurent de la forma

$$G(z, k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{nk} z^n,$$

que converge absoluta y uniformemente a G sobre cualquier dominio acotado $D \subset \mathbb{C} \setminus \{0, \infty\}$.

Densidad de los polinomios trigonométricos en $\tilde{C}[0, 2\pi]$

Variable Compleja: Cauchy-Laurent

- Tomando $z = e^{ix}$, $x \in \mathbb{R}$, tenemos

$$F(x, k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{nk} e^{inx}, \tag{4}$$

donde la serie converge absoluta y uniformemente a $F(x, k)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

De hecho, si $\psi(u) = e^{-u^2}$, entonces $c_{nk} = c_n e^{-\frac{n^2 k^2}{4}}$, donde $\{c_n\}$ son los coeficientes de Fourier de f.

- Finalmente, truncando la serie en (4) y eligiendo k convenientemente, obtendremos un polinomio trigonométrico que aproxima a f.

Densidad de los polinomios trigonométricos en $\tilde{C}[0, 2\pi]$

Variable Compleja: Cauchy-Laurent

Por lo tanto,

Teorema W3 (1885)

Sea $f \in \tilde{C}[0, 2\pi]$. Dado $\varepsilon > 0$, existe un polinomio trigonométrico $t \in T$ tal que

$$|f(x) - t(x)| < \varepsilon, \qquad \text{para todo} \quad x \in [0, 2\pi].$$

$\boxed{T \text{ es denso en } \tilde{C}[0, 2\pi]}$

Intermezzo: Polinomios algebraicos versus Polinomios triginométricos

Proposición

1. $\mathbb{P}$ es denso en $C[a,b]$, si y sólo si, $\mathbb{P}$ es denso en $C[0,1]$.
2. T es denso en $\tilde{C}[0,2\pi]$, si y sólo si,

$$\operatorname{span}\left\{1, \operatorname{sen}\frac{2\pi x}{b-a}, \cos\frac{2\pi x}{b-a}, \operatorname{sen} 2\frac{2\pi x}{b-a}, \cos 2\frac{2\pi x}{b-a}, \dots\right\}$$

es denso en $\tilde{C}[a,b]$.

Teorema PAT

T es denso en $\tilde{C}[0,2\pi]$, si y sólo si, $\mathbb{P}$ es denso en $C[a,b]$.

$$\boxed{\textbf{Teorema W2} \iff \textbf{Teorema W3}}$$

É. Picard:

Teorema P1 (1891)

Dada $f \in \tilde{C}[0, 2\pi]$. Para $\varepsilon > 0$ existe $g \in T$ tal que

$$|f(\theta) - g(\theta)| < 3\varepsilon, \quad \text{para todo} \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

É. Picard, Sur la représentation approchèe des fonctions, C. R. Acad. Sci. Paris, 112 (1891), 183–186.

L. Fejér:

Teorema F1 (1900)

Dada $f \in \tilde{C}[0, 2\pi]$. Para cada $n \geq 0$ sea

$$S_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx$$

la n-ésima suma parcial de la serie de Fourier de f. Entonces la sucesión

$$\sigma_n(f, x) = \frac{S_0(f, x) + S_1(f, x) + \cdots + S_{n-1}(f, x)}{n}, \quad S_0(f, x) = \frac{a_0}{2},$$

converge uniformemente a f cuando $n \to \infty$.

1. Fejér demostró si $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ es Riemman integrable, $\sigma_n(f, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ en cada punto de continuidad de f. De este resultado se desprende el **Teorema F1** cuando f es continua en $\mathbb{T}$.
2. Fejér descubrió su resultado a los 19 años.

L. Fejér, Sur les fonctions bornées et intègrables, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 131 (1900), 984–987.

Esbozo de la demostración:

- Sea $x \in [0, 2\pi]$. Usando que

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}, \quad n \geq 0.$$

$$S_n(f, x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}, \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt.$$

Luego,

$$S_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \left[\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)} \right] dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t) D_k(t) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t) D_k(t) dt,$$

donde

$$D_k(t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} \frac{(2k+1)t}{2}}{\operatorname{sen} \frac{t}{2}}, & \text{si } t \neq 0, \\ 2k+1, & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Esbozo de la demostración:

- Así,

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f,x) = \frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi} f(x-t)\left[\sum_{k=0}^{n-1} D_k(t)\right] dt$$

$$= \frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi} f(x-t)\left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\operatorname{sen}\frac{(2k+1)t}{2}}{\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\right] dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)K_n(t)dt,$$

donde

$$K_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{n}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{(2n+1)t}{2}}{\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\right]^2, & \text{si } \ t \neq 0, \\ n, & \text{si } \ t = 0. \end{cases}$$

- De donde se deduce

$$f(x) - \sigma_n(f,x) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} (f(x) - f(x-t))K_n(t)dt\right].$$

E. Landau:

Teorema L1 (1908)

Dada $f \in C[a,b]$, con $0 < a < b < 1$. Para cada $n \geq 1$ consideremos $c_n = \int_{-1}^{1} \left(1 - u^2\right)^n du$ y $\tilde{f} \in C[0,1]$ tal que $\tilde{f}/_{[a,b]} \equiv f$. Entonces la sucesión de polinomios

$$p_n(x) := \frac{1}{c_n} \int_0^1 \tilde{f}(u) \left(1 - (x-u)^2\right)^n du = \int_0^1 \tilde{f}(u) \mathscr{K}_n(x-u) du,$$

converge uniformemente a f en $[a,b]$.

E. Landau, Über die Approximation einer stetigen Funktion durch eine ganze rationale Funktion, Rend. Circ. Mat. Palermo, 25 (1908), 337–345.

H. Lebesgue:

Teorema HL1 (1898)

Sea $f \in C[-1,1]$. Dado $\varepsilon > 0$, existe un polinomio algebraico $p \in \mathbb{P}$ tal que

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon, \qquad \text{para todo} \;\; x \in [-1,1].$$

1. Esta demostración es una de las más citadas y elegantes del **Teorema W2**.
2. Lebesgue demostró su resultado a los 23 años.
3. Este fue la primera publicación de Lebesgue.

H. Lebesgue, Sur l'approximation des fonctions, Bull. Sciences Math., 131 (1898), 278–287.

Esbozo de la demostración:

- Sean $f \in C[-1,1]$ y $\varepsilon > 0$, entonces existen $m \in \mathbb{N}$ y $-1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = 1$ tales que la poligonal con vértices $(x_j, f(x_j))$, $j = 0, \ldots, m$ satisface:

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon, \qquad \text{para todo} \;\; x \in [-1,1].$$

La demostración de Lebesgue consiste en aproximar g por un polinomio

- Ya que

$$g(x) = g_1(x) + \sum_{j=1}^{m-1} \left[g_{j+1}(x) - g_j(x)\right] h\left(x - x_j\right),$$

donde $h(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$ y

$$g_j(x) = f(x_{j-1}) + \left(\frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}\right)\left(f(x_j) - f(x_{j-1})\right)$$

Esbozo de la demostración:

- Como $g_{j+1}(x_j) - g_j(x_j) = 0$, entonces

$$g_{j+1}(x) - g_j(x) = c_j\,(x - x_j)\,, \qquad \text{para algún} \quad c_j \in \mathbb{R}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} g(x) &= g_1(x) + \sum_{j=1}^{m-1} [g_{j+1}(x) - g_j(x)]\, h\,(x - x_j) \\ &= g_1(x) + \sum_{j=1}^{m-1} c_j\,(x - x_j)\, h\,(x - x_i) \\ &= g_1(x) + \sum_{j=1}^{m-1} c_j\,(x - x_j)_+^1, \end{aligned}$$

donde

$$x_+^1 = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Esbozo de la demostración:

- Usando que $2x_+^1 = |x| + x$, obtenemos

$$g(x) = g_1(x) + \sum_{j=1}^{m-1} c_j \, (x - x_j)_+^1$$
$$= Ax + B + \sum_{j=1}^{m-1} C_j \, |x - x_j|,$$

donde $A, B, C_j \in \mathbb{R}$.

Así Lebesgue redujo el problema a la aproximación polinomial de la función $|x|$ en $[-1, 1]$

- La clave de Lebesgue: considerar

$$|x| = \sqrt{x^2} = \sqrt{1 - (1 - x^2)} = \sqrt{1 - z},$$

donde $z = 1 - x^2$, y desarrollar $\sqrt{1 - z}$ a partir de la fórmula binomial para obtener una serie de potencias en $z = 1 - x^2$ la cual converge unfiromemente a $|x|$ en $[-1, 1]$.

Esbozo de la demostración:

- Más precisamente,

$$\sqrt{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-z)^n,$$

donde

$$\binom{\frac{1}{2}}{n}:=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}=\frac{(-1)^{n-1}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\cdots\frac{2n-3}{2}}{n!}.$$

- Luego,

$$|x|=\sqrt{1-z}=1-\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n,$$

donde

$$a_n=\begin{cases}\frac{1}{2}, & n=1,\\ \frac{(2n-3)!}{2^{2n-2}n!(n-1)!}, & n\geq 2.\end{cases}$$

- La serie de potencias anterior converge absoluta y uniformemente a $\sqrt{1-z}$ en el disco $|z|\leq 1$.

Esbozo de la demostración:

- Lo que implica que dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que el polinomio $p_{n_0}(x) = 1 - \sum_{k=1}^{n_0} a_k (1 - x^2)^k$ satisface

$$||x| - p_{n_0}(x)| < \epsilon, \text{ para todo } \ x \in [-1, 1].$$

  Por lo tanto,

$$\left| \left| \frac{x - x_j}{2} \right| - p_{n_0} \left(\frac{x - x_j}{2} \right) \right| < \epsilon, \text{ para todo } \ x, x_j \in [-1, 1].$$

- Finalmente, una cuidadosa elección de ϵ (que dependerá de las constantes predeterminadas C_j), permite verificar que

$$\left| g(x) - \left[Ax + B + \sum_{j=1}^{m-1} C_j p_{n_0} (x - x_j) \right] \right| < K\epsilon,$$

  para alguna constante $K > 0$ y todo $x \in [-1, 1]$.

S. N. Bernstein:

Teorema B1 (1912-13)

Dada $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ acotada, y $B_n(f;x) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f;x) = f(x),$$

para cada $x \in [0,1]$ en donde f sea continua. Si $f \in C[0,1]$ entonces $B_n(f;x)$ converge uniformemente a f.

Bonus:

- Construcción explícita de los polinomios aproximantes.
- Si $f \in C[a,b]$, haciendo $y = \frac{x-a}{b-a}$ trasladamos el problema de aproximación al intervalo $[0,1]$ y usamos los polinomios de Bernstein $B_n(f;y)$.

S. N. Bernstein, Démonstration du théorème de Weierstrass fondee e sur le calcul des probabilités, Comm. Soc. Math. Kharkow, 13(1-2) (1912/13). [También aparece en Bernstein's Collected Works].

Esbozo de la demostración:

- Consideremos $\delta > 0$ y $x \in [0,1]$, tales que $\left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \delta$, para $k = 0, \ldots, n$. Entonces $\frac{1}{\delta^2}\left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \geq 1$, luego

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\delta,\ 0\leq k\leq n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\delta,\ 0\leq k\leq n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{1}{\delta^2 n^2} \sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.
\end{aligned}
$$

Esbozo de la demostración:

- Ahora bien,

$$\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = n^2B_n(x^2;x) - 2xn^2B_n(x;x)$$

$$+(nx)^2B_n(1;x) = nx(1-x),$$

de donde

$$\frac{1}{\delta^2n^2}\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \frac{nx(1-x)}{\delta^2n^2} \leq \frac{1}{4\delta^2n},$$

porque $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ para todo $x \in [0,1]$.

Esbozo de la demostración:

- Por otro lado,

$$
\begin{aligned}
1 &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad \text{de donde} \\
f(x) &= \sum_{k=0}^{n} f(x) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad \text{luego}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) - B_n(f;x) &= \sum_{k=0}^{n} \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right| \geq \delta,\ 0 \leq k \leq n} \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&+ \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right| < \delta,\ 0 \leq k \leq n} \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.
\end{aligned}
$$

Esbozo de la demostración:

- Como f es acotada en $[0,1]$, existe $M > 0$ tal que si $\alpha, \beta \in [0,1]$ entonces $|f(\alpha) - f(\beta)| \leq 2M$. Si x es un punto de continuidad de f, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, siempre que $|x - y| < \delta_1$.

$$
\begin{aligned}
|f(x) - B_n(f;x)| &\leq \sum_{\substack{\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta_1, \\ 0\leq k\leq n}} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&+ \sum_{\substack{\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta_1, \\ 0\leq k\leq n}} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\leq \varepsilon \sum_{\substack{\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta_1, \\ 0\leq k\leq n}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + 2M \sum_{\substack{\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta_1, \\ 0\leq k\leq n}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\leq \varepsilon \sum_{\substack{\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta_1, \\ 0\leq k\leq n}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{2M}{4n(\delta_1)^2}.
\end{aligned}
$$

Esbozo de la demostración:

- Es decir,

$$|f(x) - B_n(f;x)| \leq \varepsilon \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{M}{2n(\delta_1)^2}\,.$$

- Por lo tanto, para n suficientemente grande,

$$|f(x) - B_n(f;x)| \leq 2\varepsilon.$$

- Finalmente, si $f \in C[0,1]$; la continuidad uniforme de f en $[0,1]$ implica dado $\eta > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \eta$, siempre que $|x - y| < \delta_2$.
- La cadena de desigualdades anterior no depende del punto x considerado. Por lo tanto, la convergencia de la sucesión $B_n(f;\cdot)$ a f es uniforme.

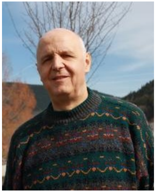
Comentarios finales

Allan Pinkus
Technion, Israel

♠ Weierstrass and Approximation Theory, *JAT*, **107** (2000), 1–66.

♠ Density in Approximation Theory, *SAT*, **1** (2005), 1–45.

♠ The Weierstrass Approximation Theorems, *SAT*, **1**(4) (2004), 37 pages.
https://www.emis.de/journals/SAT/papers/99/



Reinhard Siegmund-Schultze
Univ. Agder, Norway

♠ Weierstraß's Approximation Theorem (1885) and his 1886 lecture course revisited, in *Karl Weierstraß (1815–1897). Aspects of his Life and Work*. W, König and J. Sprekels, eds. Springer Spektrum, Berlin, 2016.

Thomas W. Körner
Univ. Cambridge, UK

♠ *Fourier Analysis*, Cambridge University Press, 1989

Doron S. Lubinsky
Georgia Tech, USA

♠ Weierstrass' Theorem in the twentieth century: a selection, *Quaestiones Mathematicae*, **18** (1995), 91–130.

Referencias

D. S. Lubinsky,
Weierstrass' Theorem in the twentieth century: a selection.
Quaestiones Mathematicae, **18** (1995), 91–130.

D. Pérez, Y. Quintana,
A survey on the Weierstrass approximation theorem.
Divulgaciones Matemáticas, **16** (1) (2008), 231–247.

T. W. Körner,
Fourier Analysis.
Cambridge University Press, 1989.

A. Pinkus,
Weierstrass and Approximation Theory.
J. Approx. Theory, **107** (2000), 1–66.

Referencias

A. Pinkus,
The Weierstrass Approximation Theorems.
Surveys Approx. Theory, **1**(4) (2004), 37 pages.

A. Pinkus,
Density in Approximation Theory.
Surveys Approx. Theory, **1** (2005), 1–45.

R. Siegmund-Schultze,
Weierstraß's Approximation Theorem (1885) and his 1886 lecture course revisited.
In: Karl Weierstraß (1815–1897). Aspects of his Life and Work, W, König and J. Sprekels, eds. Springer Spektrum, Berlin, 2016.


GRACIAS POR SU ATENCIÓN
POR FAVOR APLAUDA Y NO HAGA PREGUNTAS DIFÍCILES