Seminario de Análisis Matemático y Matemática Aplicada
Grupo de Investigación en Análisis Matemático y Matemática Aplicada (GAMMA)

Introducción a los polinomios ortogonales múltiples y la aproximación Hermite-Padé

Guillermo López Lagomasino

uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas

Madrid: 23 de abril, 2021

Esbozo de la charla

Sea s una medida (positiva) finita de Borel en $\mathbb{R}$ y

$$\widehat{s}(z) = \int \frac{ds(x)}{z-x}.$$

Para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ existen polinomios Q_n, P_n tales que:

- $\deg P_n \leq n-1, \deg Q_n \leq n, Q_n \not\equiv 0,$
- $Q_n(z)\widehat{s}(z) - P_n(z) = \mathcal{O}\left(1/z^{n+1}\right), \quad z \to \infty.$
  A P_n/Q_n se le llama aproximante de Padé enésimo de $\widehat{s}$.

  Es fácil probar que:
- (P_n, Q_n) define una única fracción racional $\pi_n = P_n/Q_n$.
- $\int x^\nu Q_n(x)ds(x) = 0, \quad \nu = 0, \ldots, n-1.$

Resumen de resultados conocidos.

Sea s una medida finita de Borel en $\mathbb{R}$ y $\{Q_n\}, n \in \mathbb{Z}_+$, la sucesión de pol. ortogonales mónicos respecto a s. Entonces:

- $\deg Q_n = n$ y se entrelazan los ceros de Q_n y Q_{n+1}.
- $xQ_n = Q_{n+1} + b_n Q_n + a_n^2 Q_{n-1}$, $n \geq 1$.
- $\max_{n\in\mathbb{N}}\{|a_n|, |b_n|\} < \infty \Leftrightarrow \operatorname{supp}(s)$ es compacto.
- $\lim_{n\in\mathbb{Z}_+} \dfrac{Q_{n+1}}{Q_n} = \varphi \Leftrightarrow \lim_{n\in\mathbb{Z}_+} a_n = a, \lim_{n\in\mathbb{Z}_+} b_n = b.$
- $s' > 0$ en $\Delta = \operatorname{Co}(\operatorname{supp}(s)) \Rightarrow \lim_{n\in\mathbb{Z}_+} \dfrac{Q_{n+1}}{Q_n} = \varphi.$
- $\limsup_{n\in\mathbb{Z}_+} \|\widehat{s} - \pi_n\|_{\mathcal{K}}^{1/2n} \leq \|\widetilde{\varphi}\|_{\mathcal{K}}^{-1} (< 1)$, $\mathcal{K} \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta$.

Definición de ortogonalidad múltiple

Sea $(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ un sistema de medidas de Borel en $\mathbb{R}$. Dado $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{Z}_+^m$, se define $Q_{\mathbf{n}}$ tal que

$$\deg Q_{\mathbf{n}} \leq |\mathbf{n}| := \sum_{k=1}^{m} n_k, \qquad Q_{\mathbf{n}} \not\equiv 0,$$

$$\int Q_{\mathbf{n}}(x) x^{\nu} ds_k(x) = 0, \quad \nu = 0, \ldots, n_k - 1,$$

para $k = 1, \ldots, m$.

Se dice que $\mathbf{n}$ es **normal** si $\deg(Q_{\mathbf{n}}) = |\mathbf{n}|$ y el sistema se dice perfecto cuando todos los índices son normales.

Si $\mathbf{n}$ es normal entonces $Q_{\mathbf{n}}$ es único.

- **Sistema con pesos exponenciales** $ds_j(x) = e^{\alpha_j x} d\mu(x), \alpha_1 < \cdots < \alpha_m$.
- **Sistema de Angelesco.** Todo sistema de medidas $(s_1, \ldots, s_m)$ donde $\Delta_k = \mathrm{Co}(\mathrm{supp}(s_k)), k = 1, \ldots, m$, y $\Delta_j \cap \Delta_k = \emptyset, j \neq k$.
- **Sistema de Nikishin.** Dadas medidas finitas σ_1, σ_2 soportadas en intervalos disjuntos definimos

$$d\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle(x) = \int \frac{d\sigma_2(t)}{x - t} d\sigma_1(x).$$

Sea $(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ un sistema de medidas finitas, $\Delta_k = \mathrm{Co}(\mathrm{supp}(s_k))$, y $\Delta_k \cap \Delta_{k+1} = \emptyset,\ k = 1, \ldots, m-1$. El sistema $(s_1, \ldots, s_m)$ dado por

$$s_1 = \sigma_1, \quad s_2 = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle, \quad \ldots, \quad s_m = \langle \sigma_1, \langle \sigma_2, \ldots, \sigma_m \rangle \rangle$$

se llama sistema de Nikishin generado por $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$.

Perfeccion sistema de Angelesco

Dado $(s_1, \ldots, s_m)$ y $(n_1, \ldots, n_m)$, como

$$\int x^\nu Q_{\mathbf{n}}(x) ds_k(x) = 0, \quad \nu = 0, \ldots, n_k - 1, \quad k = 1, \ldots, m$$

se tiene que $Q_{\mathbf{n}}$ tiene al menos n_k cambios de signo en Δ_k. Pero $\deg Q_{\mathbf{n}} \leq n_1 + \cdots + n_m$. Como los intervalos Δ_k son disjuntos, $Q_{\mathbf{n}}$ tiene exactamente n_k ceros simples en $\Delta_k, k = 1, \ldots, m$. Por tanto, $\deg Q_{\mathbf{n}} = n_1 + \cdots + n_m$.

Tarea. Estudiar el entrelazamiento de ceros entre los polinomios $Q_{\mathbf{n}}$ y $Q_{\mathbf{n}^{(k)}}$ donde $\mathbf{n}^{(k)}$ es el multi-indice que se obtiene agregando 1 a la componente k de $\mathbf{n}$.

Perfeccion sistema de exponenciales

Las considiciones de ortogonalidad se pueden reescribir como

$$\int \left(\sum_{k=1}^{m} p_k(x) e^{\alpha_k x} \right) Q_{\mathbf{n}}(x) d\mu(x) = 0$$

donde $\deg p_k \leq n_k - 1$ es arbitrario (k=1,...,m).

Tarea. Probar que

$$\sum_{k=1}^{m} p_k(x) e^{\alpha_k x}$$

tiene a lo sumo $n_1 + \cdots + n_m$ ceros en $\mathbb{R}$.

Si $Q_{\mathbf{n}}$ tuviese a lo sumo $n_1 + \cdots + n_m - 1$ cambios de signo en $\mathrm{Co}(\operatorname{supp} \mu)$ llegue a una contradiccion con la relacion de ortogonalidad.

Analice el entrelazamiento de ceros.

Àproximación Hermite-Padé (tipo II)

Dado el sistema de medidas $(s_1, \ldots, s_m)$ y $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}_+^m$, sea $Q_\mathbf{n}$ tal que:

- $\deg Q_\mathbf{n} \leq |\mathbf{n}|\,, \quad Q_\mathbf{n} \not\equiv 0\,,$
- $Q_\mathbf{n}(z)\widehat{s}_k(z) - P_{\mathbf{n},k}(z) = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{z^{n_k+1}}\right), z \to \infty, \quad k = 1, \ldots, m.$ para ciertos polinomios $P_{\mathbf{n},k}$.

Se llama aproximante Hermite-Padé del sistema $(\widehat{s}_1, \ldots, \widehat{s}_m)$ respecto a $\mathbf{n}$ al vector de fracciónes racionales

$$\pi_\mathbf{n}(z) := \left(\frac{P_{\mathbf{n},1}(z)}{Q_\mathbf{n}(z)}, \ldots, \frac{P_{\mathbf{n},m}(z)}{Q_\mathbf{n}(z)}\right).$$

Para índices normales el aproximante Hermite-Padé es único.

Recurrencia

Consideremos la familia de multi-índices

$$\mathbf{I} := \{(0,\dots,0),(1,0,\dots,0),(1,1,0,\dots,0),\dots\} \subset \mathbb{Z}_+^m.$$

Cada $\mathbf{n}$ en $\mathbf{I}$ se puede identificar con $n = |\mathbf{n}|$. Si $n = km + r$, $0 \leq r \leq m-1$, entonces $\mathbf{n} = (k+1,\dots,k+1,k,\dots,k)$. Si los multi-índices en $\mathbf{I}$ son normales, los polinomios mónicos $Q_n = Q_{\mathbf{n}}$ satisfacen una recurrencia a $m+2$ términos

$$Q_{-m}(x) = \dots = Q_{-1}(x) = 0, \quad Q_0(x) = 1,$$

$$xQ_n(x) = Q_{n+1}(x) + a_{n,n}Q_n(x) + \cdots + a_{n,n-m}Q_{n-m}(x), \quad n \geq 1.$$

Esta relación determina la matriz infinita por bandas

$$\mathcal{A} = (a_{i,j})_{i,j=0}^{\infty},$$

$a_{i,j} = 0, j > i+1, i > j+m; a_{i,i+1} = 1.$

Acotación de ceros y del operador $\mathcal{A}$

Theorem

Supongamos que para un sistema de medidas $(s_1, s_2, \ldots, s_m)$*, los índices en* $\mathbf{I}$ *son normales, los ceros de* Q_n *simples y se entrelazan para* $n \geq n_0$*. Entonces* $\mathcal{A}$ *está acotado si y solo si los ceros de* Q_n *están uniformemente acotados.*

Corollary

Los coeficientes de recurrencia en un sistema Angelesco $(s_1, \ldots, s_m)$ *están uniformemente acotados si y solo si todas las medidas* s_k*,* $k = 1, \ldots, m$*, tienen soporte compacto.*

Corollary

Los coeficientes de la recurrencia en un sistema de Nikishin $\mathcal{N}(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ *están uniformemente acotados si y solo si* σ_1 *tiene soporte compacto.*

Theorem

Supongamos que para un sistema de medidas $(s_1, s_2, \ldots, s_m)$, *todos los índices en* $\mathbf{I}$ *son normales, los ceros simples y se entrelazan* $n \geq n_0$. *Entonces, para cada* $i \in \{j, j+1, \ldots, j+m\}$ *y* $j \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ *existe*

$$\lim_{k\to\infty} a_{pk+i,pk+j} = b_{i,j}\,,$$

si y solo si existen funciones $F_i,\ i = 1, \ldots, p$, *y un intervalo acotado* $\Delta \subset \mathbb{R}$, *que contiene los ceros de* Q_n, *tales que*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{Q_{kp+i}(z)}{Q_{kp+i-1}(z)} = F_i(z)\,, \qquad \mathcal{K} \subset \mathbb{C} \setminus \Delta\,,$$

uniformemente en cada subconjunto compacto $\mathcal{K}$ *de la región indicada.*

Una superficie de Riemann

Considéremos la superficie de Riemann de $(m+1)$ hojas

$$\mathcal{R} = \overline{\bigcup_{k=0}^{m} \mathcal{R}_k},$$

formada pegando de manera usual las hojas

$$\mathcal{R}_0 := \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_1 \,, \quad \mathcal{R}_m = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_m \,,$$

$$\mathcal{R}_k := \overline{\mathbb{C}} \setminus (\Delta_k \cup \Delta_{k+1}), \quad k = 1, \ldots, m-1 \,.$$

Fijemos $l \in \{1, \ldots, m\}$. Sea $\psi^{(l)}, l = 1, \ldots, m$, la representación conforme de $\mathcal{R}$ en $\overline{\mathbb{C}}$ tal que

$$\psi^{(l)}(z) = z + \mathcal{O}(1), z \to \infty^{(0)} \,, \quad \psi^{(l)}(z) = \mathcal{O}(1/z), z \to \infty^{(l)} \,.$$

Sea $\psi_k^{(l)}$ la rama de $\psi^{(l)}$ en $\mathcal{R}_k$.

Asintótica del cociente

Theorem

Sea $\mathcal{N}(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ *tal que* $\sigma_k' > 0$ *casi dondequiera en* Δ_k, $1 \leq k \leq m$. *Entonces, para cada* $l = 1, \ldots, m$,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{Q_{km+l}(z)}{Q_{km+l-1}(z)} = \psi_0^{(l)}(z)\,, \qquad \mathcal{K} \subset \mathbb{C} \setminus \Delta_1\,,$$

uniformemente en cada subconjunto compacto $\mathcal{K}$ *de la región indicada.*

Corollary

Sea $\mathcal{N}(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ *tal que* $\sigma_k' > 0$ *casi dondequiera en* Δ_k, $1 \leq k \leq m$. *Entonces, para* $i \in \{j, \ldots, j+m\}$ *y* $j \in \{0, \ldots, m-1\}$ *existe*

$$\lim_{k\to\infty} a_{km+i,km+j} = b_{i,j}\,.$$

Los valores $b_{i,j}$ *solo depende del sistema de intevalos* Δ_k, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Para todo $k \in \mathbb{Z}_+, 0 \leq j \leq m-1, j \leq i \leq j+m$, definamos

$$b_{km+i,km+j} := b_{i,j}.$$

Llamamos polinomios Chebyshev–Nikishin a los construidos mediante la relación de recurrencia

$$z\widetilde{Q}_n(z) = \widetilde{Q}_{n+1}(z) + b_{n,n}\widetilde{Q}_n(z) + \cdots + b_{n,n-m}\widetilde{Q}_{n-m}(z)$$

con las condiciones iniciales

$$\widetilde{Q}_{-m} \equiv \widetilde{Q}_{-m+1} \equiv \cdots \equiv \widetilde{Q}_{-1} \equiv 0, \quad \widetilde{Q}_0 \equiv 1.$$

Se puede probar que para cada $k = 1, \ldots, m$ existe una medida ν_k absolutamente continua y de signo constante en el interior de Δ_1 tal que

$$\frac{1}{\psi_0^{(k)}(z)} = \int \frac{d\nu_k(x)}{z-x}.$$

Theorem

Sean $(\nu_1, \ldots, \nu_m)$ las medidas definidas anteriormente en Δ_1. Entonces, los polinomios Chebyshev-Nikishin $\widetilde{Q}_n$ satisfacen

$$\int_{\Delta_1} \widetilde{Q}_n(x)\, x^l d\nu_k(x) = 0, \qquad l = 0, \ldots, n_k - 1, \quad k = 1, \ldots, m,$$

donde n_k es la k-ésima componente del multi-índice $\mathbf{n} \in \mathbf{I}$.

Theorem

Existen medidas ρ_k suportadas en Δ_k, $k = 1, \ldots, m$, tales que $(\nu_1, \ldots, \nu_m) = \mathcal{N}(\rho_1, \ldots, \rho_m)$. La medida ρ_k es absolutamente continua en Δ_k, $\rho_k'(x)$ no toma el valor cero en Δ_k y tiene signo constante en el interior de Δ_k.

Theorem

Sea $(s_1, \ldots, s_m) = \mathcal{N}(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ *y* $\Lambda \subset \mathbb{Z}_+^m$*. Supongamos que existen constantes* $c > 0, \kappa < 1$*, tales que*

$$n_j \geq \frac{|\mathbf{n}|}{m} - c|\mathbf{n}|^\kappa, \qquad j = 0, \ldots, m.$$

Entonces,

$$\lim_{\mathbf{n}\in\Lambda} \frac{P_{\mathbf{n},k}}{Q_\mathbf{n}} = \widehat{s}_k \qquad \mathcal{K} \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathrm{Co}(\operatorname{supp} \sigma_1), \qquad k = 1, \ldots, m.$$

Más aún,

$$\limsup_{\mathbf{n}\in\Lambda} \|\widehat{s}_k - \frac{P_{\mathbf{n},k}}{Q_\mathbf{n}}\|_\mathcal{K}^{1/2|\mathbf{n}|} \leq \delta_\mathcal{K} < 1, \qquad k = 1, \ldots, m,$$

donce $\| \cdot \|_\mathcal{K}$ *denota la norma uniforme en* $\mathcal{K}$*.*

Referencias

- A.I. Aptekarev, G. López , I.A. Rocha. **Ratio asymptotic of Hermite-Padé orthogonal polynomials for Nikishin systems**. Sbornik: Math. **196** (2005), 1089-1107.
- A.I. Aptekarev, V.I. Kalyagin, G. López, I.A. Rocha. **On the limit behavior of recurrence coefficients for multiple orthogonal polynomials**. J. of Approx. Theory **139** (2006), 346–370.
- U. Fidalgo, G. López. **General results on the convergence of multipoint Hermite-Padé approximants of Nikishin systems**. Constr. Approx. **25** (2007), 89–107.
- U. Fidalgo and G. López. **Nikishin systems are perfect**. Constructive Approx. 34 (2011), 297-356.
- U. Fidalgo and G. López. **Nikishin systems are perfect. Case of unbounded and touching intervals**. J. of Approx. Theory **163** (2011), 779–811.
- E. M. Nikishin. **On simultaneous Padé approximants**. Math. USSR Sb. **41** (1982), 409-425.
- E. A. Rakhmanov. **On the asymptotic of the ratio of orthogonal polynomials II**. Math. USSR Sb. **46** (1983), 105-117.

Muchas gracias