VNIVERSIDAD
DE LA HABANA
Facultad de Matemática y Computación
Departamento de Teoría de Funciones

Tesis Doctoral

ASINTÓTICA DE POLINOMIOS EXTREMALES DE SOBOLEV

Ignacio C. Pérez Izquierdo

Ciudad de La Habana, 2006

Universidad de La Habana
Facultad de Matemática y Computación
Departamento de Teoría de Funciones

ASINTÓTICA DE POLINOMIOS EXTREMALES DE SOBOLEV

Tesis presentada en opción al grado científico de
Doctor en Ciencias Matemáticas

Autor: Lic. Ignacio C. Pérez Izquierdo
Tutor: Dr. Héctor E. Pijeira Cabrera

Ciudad de La Habana
2006

AGRADECIMIENTOS

A Guillermo López Lagomasino, profesor, compañero y más que amigo, por su guía, apoyo y ayuda invaluables. A María Elena, Inti y Abey, por acogerme en su casa como un miembro más de la familia.

A Héctor Pijeira, tutor y amigo, con cuya ayuda siempre he podido contar y cuyo apoyo y guía han sido vitales. A Marcela, por todas sus atenciones.

A Manuel Bello y María Elena, a Jesús Illán y Julia, a Miguel Jiménez e Hilda, por su amistad y por la grata acogida que siempre me dan.

A Andrei Martínez, por apoyarme e invitarme a presentar parte de este trabajo en el seminario que dirige.

A Rita, por su paciencia y su inestimable ayuda en la etapa final de este trabajo.

A Gustavo, mi hermano y amigo, por su apoyo incondicional.

A mis padres, de los que tanto he recibido y en quienes siempre he encontrado el apoyo, la confianza y el estímulo necesarios.

A Vilma, por su dedicación, entrega y cariño.

DEDICATORIA

A mi familia.

SÍNTESIS

En esta tesis se estudia la localización y distribución asintótica de ceros de sucesiones de polinomios que satisfacen una condición extremal respecto a una norma dada sobre el espacio de los polinomios, así como el comportamiento asintótico de dichas sucesiones. Estas incluyen como caso particular a las sucesiones de polinomios ortogonales respecto a productos internos de Sobolev soportados sobre subconjuntos compactos del plano complejo.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Es conocido que los polinomios ortogonales constituyen una herramienta básica en el estudio de importantes problemas de la Matemática y la Ingeniería.

La necesidad de ampliar el círculo de problemas tratados por esta teoría, motivó la extensión de la noción de ortogonalidad estándar mediante la consideración de otros modelos de ortogonalidad como son, por ejemplo, la ortogonalidad respecto a medidas variantes, la ortogonalidad múltiple, la ortogonalidad matricial y la ortogonalidad respecto a productos internos con derivadas (también llamados productos internos de Sobolev).

En esta tesis centraremos nuestra atención en este último modelo de ortogonalidad.

Sea $\{\mu_j\}_{j=0}^{N}$ un conjunto de $N+1$ medidas positivas finitas de Borel. Supongamos que para cada $j = 0, \cdots, N$, el soporte $\mathrm{S}(\mu_j)$ de μ_j es un subconjunto compacto del plano complejo $\mathbb{C}$, y que $S(\mu_0)$ contiene infinitos puntos. Si p, q son polinomios, definimos

$$\langle p, q\rangle_S = \sum_{j=0}^{N} \int p^{(j)}(z)\overline{q^{(j)}(z)}d\mu_j(z) = \sum_{j=0}^{N} \langle p^{(j)}, q^{(j)}\rangle_{L^2(\mu_j)}, \tag{1}$$

donde $q^{(k)}$ denota la k-ésima derivada de q. Obviamente, esta expresión define un producto interno sobre $\mathcal{P}$ (espacio de los polinomios algebraicos), que llamaremos *producto interno de Sobolev*. Al compacto $\Delta = \bigcup_{j=0}^{N} \mathrm{S}(\mu_j)$ lo llamaremos *soporte* del producto interno de Sobolev. Es claro que en el caso de ortogonalidad estándar, es decir, cuando $N = 0$ en (1), el soporte del producto interno coincide con el soporte de la medida de ortogonalidad.

Diremos que el producto anterior es un producto interno de Sobolev *discreto*, si sólo la medida μ_0 tiene soporte con un número infinito de puntos (en otras palabras, las medidas $\mu_j,\ j = 1, \cdots, N$, son combinaciones lineales finitas de deltas de Dirac). En caso contrario diremos que (1) define un producto interno de Sobolev *continuo*.

La norma de $q \in \mathcal{P}$ inducida por este producto interno es

$$\|q\|_S \;=\; \left(\sum_{j=0}^{N} \int |q^{(j)}(z)|^2\, d\mu_j(z)\right)^{1/2} = \left(\sum_{j=0}^{N} \|q^{(j)}\|^2_{L^2(\mu_j)}\right)^{1/2}.$$

Denotemos por $Q_n(z)$ al n-ésimo polinomio ortogonal mónico de Sobolev respecto a (1).

Entonces
$$q_n(z) = Q_n(z)/\|Q_n\|_S, \quad n \in \mathbb{Z}_+$$
es el correspondiente polinomio ortonormal.

Llamaremos polinomios ortogonales de Sobolev discretos (continuos) a los asociados a un producto interno de Sobolev discreto (continuo).

El estudio de los polinomios ortogonales de Sobolev ha constituido un campo de investigación muy activo en las dos últimas décadas, como atestigua la extensa bibliografía existente sobre el tema. Entre las razones que motivan este interés podemos citar:
(1) Comparación con la teoría estándar de polinomios ortogonales.
(2) Teoría espectral de ecuaciones diferenciales ordinarias.
(3) Análisis de los métodos espectrales en el tratamiento numérico de problemas de contorno para ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.
(4) Búsqueda de algoritmos de cómputo para series de Fourier-Sobolev en términos de polinomios ortogonales de Sobolev, cuando las normas consideradas involucran a la función y a algunas de sus derivadas.

El trabajo [22] de D. C. Lewis, se considera como punto de partida de la teoría de polinomios ortogonales en espacios de Sobolev. En él se plantea por primera vez el problema de la aproximación por mínimos cuadrados de una función y, simultáneamente, de algunas de sus derivadas, a través de aproximantes polinómicos y de las derivadas de estos aproximantes. Aún cuando este autor no hace uso de los polinomios ortogonales de Sobolev, este trabajo constituyó una motivación para estudios posteriores.

En 1962 Althammer [2] retoma el problema considerado por Lewis. En este trabajo se da el primer ejemplo de producto interno de Sobolev (1) y se inicia el estudio de los polinomios ortogonales asociados a el.

En [36] se esbozan las características predominantes de lo que constituyen tres períodos de desarrollo de esta teoría:
El primer período de desarrollo se puede situar entre el trabajo de Althammer y la publicación [8] de E.A. Cohen en 1975. Las características que distinguen a este período son:
(1) Consideración de productos de Sobolev con sólo dos medidas (N=1), donde μ_0 y μ_1 son medidas absolutamente continuas respecto a la medida de Lebesgue dadas por funciones suaves. Fundamentalmente se consideran pesos clásicos.
(2) El objeto de investigación estuvo centrado en el estudio de propiedades algebraicas y de entrelazamiento de ceros.
(3) La fórmula de integración por partes juega un papel fundamental en las demostraciones.

En los siguientes años, hasta fines de la década de los ochenta, no se abordó el estudio de los polinomios ortogonales respecto a productos internos de Sobolev. Un

nuevo período comienza a fines de la década de los ochenta. Por un lado, se inicia el estudio sistemático de los productos de Sobolev discretos y, por otro lado, se retoma el caso continuo. Rasgos distintivos de este período son:
(1) Se introduce el concepto de par coherente de medidas. Con este concepto se amplió la clase de productos de Sobolev bajo consideración.
(2) El objeto de estudio se amplía. Al interés por las propiedades algebraicas y la localización de ceros, se agregan las investigaciones sobre propiedades diferenciales y asintóticas.

Un tercer período comienza con [28], que tiene su continuación en [23]. Esta nueva etapa se caracteriza por:
(1) Se consideran productos de Sobolev con respecto a clases generales de medidas y que involucran derivadas hasta un orden N arbitrario.
(2) El objeto de estudio se centra básicamente en el estudio de propiedades asintóticas y se inician las investigaciones sobre la teoría de momentos con respecto a productos de Sobolev.
(3) Se amplía el espectro de técnicas de trabajo. A las tradicionales herramientas de la teoría de funciones se agregan otras de aproximación racional, teoría de potencial, espacios H^p y teoría de operadores acotados.

La ortogonalidad respecto a productos escalares de Sobolev presenta diferencias sustanciales con relación a la ortogonalidad estándar. Estas diferencias se traducen en la necesidad de nuevas técnicas en el tratamiento del caso Sobolev. A continuación comentamos algunas de estas diferencias.

Es bien conocido que en el caso estándar los ceros de los polinomios ortogonales respecto a una medida soportada sobre un subconjunto compacto del plano complejo se encuentran en la envoltura convexa del soporte de la medida de ortogonalidad. Más aún, si la envoltura convexa del soporte de la medida no es un segmento, entonces los ceros se encuentran en el interior de dicha envoltura.

Como muestran los resultados numéricos que aparecen en [16], los ceros de los polinomios ortogonales de Sobolev pueden abandonar la envoltura convexa del soporte del producto interno (algo que ya había sido advertido en [2]). Incluso pueden existir ceros complejos aún cuando el producto interno de Sobolev esté soportado sobre el eje real.

Un hecho muy importante en el caso estándar es el siguiente: la ortogonalidad de un sistema de polinomios respecto a una medida soportada sobre el eje real, equivale a que dichos polinomios satisfacen una relación de recurrencia a tres términos. Conocidos sus coeficientes, la relación de recurrencia a tres términos, además de constituir un procedimiento conveniente de obtener los polinomios ortogonales, establece un vínculo entre estos y áreas como la teoría de operadores, lo cual permite obtener información útil de los polinomios ortogonales y la medida de ortogonalidad (ver [46]).

En el caso de los polinomios ortogonales de Sobolev no se tiene una relación de recurrencia a tres términos. Esto se debe a que el operador de multiplicación no es simétrico respecto al producto de Sobolev (1) (donde $N \geq 1$) a causa de la presencia de derivadas en el producto interno. En [14] se demostró que si las medidas presentes en (1) están soportadas sobre el eje real, los correspondientes polinomios ortogonales satisfacen una relación de recurrencia con un número de términos (al menos $2N+3$) que no depende del grado del polinomio, sólo si (1) es un producto de Sobolev discreto.

En relación con las propiedades asintóticas de los polinomios ortogonales de Sobolev, los primeros resultados de carácter general se obtuvieron para polinomios de Sobolev discretos en [28] y [23]. En [23] se considera el siguiente producto interno de Sobolev discreto generalizado

$$\langle p, q \rangle_S = \int p(x)q(x)\, d\mu_0(x) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=0}^{N_j} p^{(i)}(c_j)\mathcal{L}_{j,i}(q; c_j), \tag{2}$$

donde $c_j \in \mathbb{C}$, $\mathcal{L}_{j,i}(q; c_j)$ es la evaluación en c_j del operador diferencial lineal ordinario con coeficientes constantes $\mathcal{L}_{j,i}$ actuando sobre q y $\mathcal{L}_{j,N_j} \not\equiv 0$, $j = 1, \cdots, m$. Al igual que en el producto (1), denotaremos también por Q_n al n-ésimo polinomio ortogonal mónico de Sobolev con respecto al producto (2). El objetivo de [23] era determinar el comportamiento asintótico relativo entre los polinomios ortogonales respecto de (2) y los polinomios ortogonales estándar asociados a la medida μ_0. Asumiendo que $\mu_0 \in \mathrm{M}(0,1)$, los autores probaron que los polinomios Q_n tienen asintótica del cociente (similar a la de los polinomios ortogonales mónicos asociados a μ_0) uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\overline{\mathbb{C}} \setminus (\mathrm{S}(\mu_0) \cup \{c_0, \cdots, c_m\})$.

En [24] se consideró el producto de Sobolev discreto que resulta de tomar en (2) a $\mathcal{L}_{j,i}(q; c_j) = A_{j,i}q^{(i)}(c_j)$, donde $A_{j,i} \geq 0$, $A_{j,N_j} > 0$, y $c_j \in \mathbb{R}$. En el se probó que si la medida μ_0 pertenece a la clase **Reg** y su soporte $\mathrm{S}(\mu_0)$ es un compacto regular, entonces los polinomios Q_n tienen la misma distribución asintótica de ceros que los polinomios ortogonales mónicos respecto a la medida μ_0, lo cual confirmó que aún cuando algebraicamente los polinomios ortogonales de Sobolev discretos presentan marcadas diferencias respecto a los polinomios ortogonales estándar, analíticamente ambos sistemas se comportan de manera similar.

En relación con el caso continuo, en [16] se estudió la distribución asintótica de los ceros y puntos críticos de polinomios ortogonales de Sobolev mediante la aplicación (por vez primera) de métodos de la teoría de potencial logarítmico. En dicho trabajo se consideró el producto de Sobolev (1) con sólo dos medidas μ_0 y μ_1 soportadas sobre subconjuntos compactos regulares de $\mathbb{R}$ y pertenecientes a la clase **Reg**. Bajo estas suposiciones generales los autores probaron que la distribución asintótica de los ceros de Q_n' es la medida de equilibrio del soporte Δ del producto interno. Si adicionalmente se cumple que $\mathrm{S}(\mu_1) \subset \mathrm{S}(\mu_0)$, entonces también se tiene la distribución asintótica de los ceros de la propios polinomios Q_n, la cual coincide también con la medida de equilibrio de $\Delta = \mathrm{S}(\mu_0)$. Como en ese momento no se tenía ningún resultado general sobre la localización de los ceros de los polinomios de Sobolev, los autores de [16] no pudieron concluir nada con relación a la asintótica de la raíz enésima de los polinomios Q_n.

A diferencia de la ortogonalidad estándar, la localización de los ceros de los polinomios ortogonales de Sobolev en el plano complejo no es un problema trivial. Como se mencionó anteriormente, los ceros de los polinomios de Sobolev no necesariamente permanecen en la envoltura convexa del soporte del producto interno. El siguiente problema permanece aún abierto:

Siendo las medidas que definen el producto interno (1) de soporte compacto, ¿están acotados uniformemente los ceros de la sucesión de polinomios ortogonales de Sobolev?

La localización de los ceros de los polinomios ortogonales de Sobolev es de vital importancia en el estudio del comportamiento asintótico de la raíz enésima de dichos polinomios.

Las cuestiones tratadas en [16] fueron posteriormente retomadas en [24] para el caso de un producto interno de la forma (1) soportado sobre el eje real y con N arbitrario. En este trabajo se obtiene información adicional sobre la localización de los ceros que permite derivar el comportamiento asintótico de la raíz enésima de los polinomios ortogonales de Sobolev en el exterior de un cierto conjunto compacto. Los autores vincularon los ceros de los polinomios ortogonales de Sobolev con el operador de multiplicación, lo que les permitió abordar el problema de la localización de los ceros de dichos polinomios en términos de la acotación de este operador. También introdujeron una condición suficiente para la acotación del operador de multiplicación: la de *dominación secuencial*. Finalmente, con los resultados sobre acotación de ceros y empleando métodos de la teoría de potencial logarítmico, obtuvieron la distribución asintótica de ceros y el comportamiento asintótico de la raíz enésima de los polinomios ortogonales de Sobolev.

En el contexto de la asintótica fuerte, una contribución fundamental para el caso de productos de Sobolev respecto a medidas generales con soporte compacto fue la dada en [31], donde se consideró un producto de la forma (1) con sólo dos medidas μ_0 y μ_1 soportadas sobre un mismo arco o curva de Jordan suave Γ de capacidad logarítmica positiva. En dicho trabajo, sobre la base de la propiedad extremal de los polinomios ortogonales, se obtiene la asintótica de las normas de los polinomios ortogonales mónicos de Sobolev, la cual juega un papel crucial en el establecimiento de la asintótica fuerte en la componente conexa de $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ que contiene al infinito . Asumiendo que μ_0 es arbitraria, y que μ_1 es absolutamente continua (respecto a la medida lineal de Lebesgue sobre Γ) y satisface la condición de *Szegö*, se demuestra asintótica fuerte para la sucesión $\{Q_n'\}$. Si adicionalmente se asume que la medida μ_0 es también absolutamente continua y pertenece a la clase de *Szegö*, entonces se obtiene la asintótica fuerte de los polinomios Q_n.

Las fórmulas asintóticas obtenidas muestran que sólo la medida μ_1 cuenta, que sólo el término que contempla derivadas tiene un impacto significativo en el comportamiento asintótico de la sucesión de polinomios ortogonales de Sobolev. Esto se debe a que en el producto interno

$$\langle p, q\rangle_S = \int_\Gamma p(\xi)\overline{q(\xi)}d\mu_0(\xi) + \int_\Gamma p'(\xi)\overline{q'(\xi)}d\mu_1(\xi)$$

la presencia de la derivada hace que los coeficientes principales de los polinomios que aparecen en el segundo término del producto estén multiplicados por sus grados, y el efecto que esto produce se hace más visible en la medida en que aumenta el grado del polinomio.

En [32] se extienden los resultados de [31] al caso de $N \in \mathbb{Z}_+$ arbitrario.

Nuestra investigación se centra en el estudio del comportamiento asintótico de polinomios extremales respecto a una norma definida sobre $\mathcal{P}$, que involucra derivadas hasta un cierto orden. Estos polinomios extremales incluyen como caso particular a los polinomios ortogonales respecto a productos internos de Sobolev.
La tesis se estructura en introducción, cuatro capítulos, conclusiones y recomendaciones y bibliografía.

En el Capítulo 1 realizamos una recopilación de las notaciones y resultados básicos que se emplearán en los capítulos restantes de la tesis, con sus correspon-dientes referencias bibliográficas.

En el Capítulo 2 extendemos los resultados de [24] al caso en que las medidas involucradas en el producto interno están soportadas sobre subconjuntos compactos del plano complejo. Este capítulo consta de dos epígrafes, en los que se aborda el problema de la localización de ceros y el comportamiento asintótico de los polinomios ortogonales de Sobolev respectivamente. Los resultados aparecen publicados en [26].

En el primer epígrafe probamos que la acotación del operador de multiplicación sobre el espacio de los polinomios, provisto de la norma inducida por el producto interno de Sobolev, implica la acotación uniforme de los ceros de los correspondientes polinomios ortogonales de Sobolev. La demostración que obtuvimos de este teorema es muy elegante y simple si se compara con la dada para un resultado análogo en [24]. Con ella se mejora la cota superior obtenida en [24] para el radio del disco cerrado con centro en el origen que contiene a los ceros de los polinomios ortogonales de Sobolev.

La condición de dominación secuencial se extiende sin modificación alguna al caso complejo y demostramos que la misma implica la acotación del operador de multiplicación sobre el espacio de los polinomios provisto de la norma inducida por el producto interno de Sobolev.

Para productos internos de Sobolev soportados sobre el eje real, se estudia el caso cuando los soportes de las medidas son mutuamente disjuntos y se da una condición suficiente para la acotación de los ceros.

El segundo epígrafe trata sobre la distribución asintótica de ceros y el comportamiento asintótico de la raíz enésima de los polinomios ortogonales de Sobolev. Bajo la condición de l-regularidad demostramos que la sucesión de las derivadas de orden mayor o igual a l de los polinomios ortogonales mónicos de Sobolev tiene comportamiento asintótico minimal respecto a la norma uniforme sobre el soporte del producto interno. De esto se deriva la distribución asintótica regular de ceros y la asintótica de la raíz enésima de tales sucesiones. Si adicionalmente, el producto de Sobolev es secuencialmente dominado y 0-regular, se obtiene la distribución asintótica regular de ceros y la asintótica de la raíz enésima de la propia sucesión de polinomios ortogonales mónicos de Sobolev.

En el capítulo 3 consideramos un producto interno de Sobolev de la forma

$$\langle p, q\rangle_S \;=\; \sum_{k=0}^{N-1}\langle p^{(k)}, q^{(k)}\rangle_k + \langle p^{(N)}, q^{(N)}\rangle_N,$$

donde $\langle\cdot,\cdot\rangle_k$ $(k = 0, \cdots, N-1)$ denota un producto estándar o bien un cierto producto de Sobolev discreto, y $\langle\cdot,\cdot\rangle_N$ denota el producto de Sobolev discreto considerado en [5]. En este capítulo extendemos los resultados sobre asintótica fuerte de [31], [32] y [5] a un producto interno de la forma anterior.

Primeramente obtenemos la asintótica de las normas de los polinomios ortogonales mónicos de Sobolev Q_n, cuestión esta que juega un papel crucial en el estable-cimiento de la asintótica fuerte.

Establecemos la asintótica fuerte de los polinomios ortogonales de Sobolev y de todas sus derivadas hasta el orden N inclusive. Demostramos que $\frac{1}{n^N}Q_n^{(N)}$ se comporta, asintóticamente, como L_{n-N}, donde L_n es el enésimo polinomio ortogonal mónico de Sobolev respecto a $\langle\cdot,\cdot\rangle_N$. Además, este comportamiento asintótico es independiente de los primeros N términos del producto interno de Sobolev.

Del comportamiento asintótico de los polinomios de Sobolev derivamos la localización asintótica de los ceros de los polinomios ortogonales de Sobolev.

En el Capítulo 4 extendemos los resultados obtenidos en el Capítulo 2 al caso de polinomios extremales con respecto a la norma

$$\begin{aligned}\|q\|_1 \;&=\; \left(\int \left[T(q)W^{2/p}T(q)^*\right]^{p/2} d\mu\right)^{1/p}\\ &=\; \left(\int \left[T(q)U\Lambda^{2/p}U^*T(q)^*\right]^{p/2} d\mu\right)^{1/p}\end{aligned}$$

sobre $\mathcal{P}$, donde $\Lambda = (\lambda_j)$ $(0 \le j \le N)$ es una matriz diagonal de funciones medibles Borel, positivas y acotadas μ casi dondequiera, $U = (u_{j,k})$ $(0 \le j, k \le N)$ es una matriz cuadrada de funciones medibles Borel acotadas, tal que la matriz numérica

$$U(z) = (u_{j,k}(z))\,, \quad 0 \le j, k \le N,$$

es unitaria μ casi dondequiera, $W = U\Lambda U^*$ (U^* es la transpuesta conjugada de U), y

$$T(q) = (T_0(q), \cdots, T_N(q)),$$

donde $T_j : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ es un operador lineal.

Para $p = 2$ la norma anterior tiene como caso particular la norma inducida por el producto interno de Sobolev considerado en el Capítulo 2. También coincide con la norma inducida por otros casos importantes de productos internos no estándares reportados en la literatura.

En el primer epígrafe estudiamos el problema de la localización de ceros de polinomios extremales respecto a la norma anterior. Comenzamos demostrando que si para una norma arbitraria sobre $\mathcal{P}$, el operador de multiplicación esta acotado, entonces los ceros de una sucesión de polinomios extremales mónicos respecto a esta norma están uniformemente acotados. Por tal razón nos dimos a la tarea de encontrar condiciones bajo las cuales el operador de multiplicación está acotado sobre el espacio estrictamente convexo $(\mathcal{P}, \|\cdot\|_1)$. Con este fin introducimos la noción de familia de medidas totalmente dominada y demostramos que, bajo esta condición, los ceros de la sucesión de polinomios extremales mónicos están uniformemente acotados para dos casos importantes de la norma considerada, a saber

$$T(q) = (q, q^{(1)}, \cdots, q^{(N)})$$

y

$$T_j(q) = \sum_n \frac{q^{(n(N+1)+j)}(0)}{(n(N+1)+j)!}\, z^n.$$

En el segundo epígrafe estudiamos la distribución asintótica de ceros y la asintótica de la raíz enésima de los polinomios extremales mónicos respecto a la norma $\|\cdot\|_1$ en el caso en que

$$T(q) = (q, q^{(1)}, \cdots, q^{(N)}).$$

Asumiendo que $\lambda_0 d\mu \in \mathbf{Reg}$, $\mathrm{S}(\mu)$ es un conjunto compacto regular respecto al problema de Dirichlet, y la familia de medidas $\lambda_0 d\mu, \ldots, \lambda_N d\mu$ está totalmente dominada demostramos que tanto la sucesión de polinomios extremales mónicos respecto a la norma $\|\cdot\|_1$, como sus derivadas, tienen comportamiento asintótico minimal respecto a la norma uniforme sobre $S(\mu)$. De esto se deduce la distribución asintótica regular de ceros y la asintótica de la raíz enésima de la sucesión de polinomios extremales mónicos y de sus derivadas. Los resultados de este capítulo aparecen publicados en [27].

Como introducción al tema de los polinomios ortogonales de Sobolev recomendamos los trabajos [29], [34], [30] y [33]. Los dos primeros recopilan una buena parte de los resultados obtenidos en relación a la parte formal de la teoría (localización de ceros, relaciones de recurrencia, fórmulas diferenciales, etc). Los dos últimos tratan básicamente las propiedades asintóticas de los polinomios ortogonales de Sobolev.

Capítulo 1: PRELIMINARES

Capítulo 1

PRELIMINARES

En este capítulo recopilamos las definiciones, resultados y notaciones básicas que se requieren en los restantes capítulos.

1.1. Polinomios Ortogonales

Como referencias para esta sección, recomendamos [25], [45] y [47].

Consideremos una medida μ positiva finita de Borel, cuyo soporte $\mathrm{S}(\mu)$ es un subconjunto compacto del plano complejo que contiene infinitos puntos.

Denotemos por $\mathcal{P}$ el espacio de todos los polinomios. Entonces $\mathcal{P} \subset L^2(\mu)$ y, aplicando el proceso de Gram - Schmidt a la base canónica $\{z^n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ de $\mathcal{P}$, obtenemos una única sucesión de polinomios ortonormales

$$p_n(\mu; z) = \frac{1}{\lambda_n(\mu)^{1/2}}\, z^n + \cdots\ , \quad \lambda_n(\mu) > 0,$$

$$\langle p_n, p_m\rangle_{L^2(\mu)} = \int p_n(\mu; z)\overline{p_m(\mu; z)} d\mu(z) = \delta_{m,n} \tag{1.1}$$

Denotemos por $P_n(\mu; z) = \lambda_n(\mu)^{1/2} p_n(\mu; z)$ los correspondientes polinomios ortogonales mónicos. Entonces,

$$\lambda_n(\mu) = \|P_n(\mu; \cdot)\|^2_{L^2(\mu)}.$$

Podemos probar fácilmente que (1.1) equivale a que $p_n(\mu; z)$ satisfaga las n relaciones de ortogonalidad siguientes

$$\langle z^\nu, p_n(\mu; z)\rangle_{L^2(\mu)} = 0, \quad \nu = 0, \cdots, n-1.$$

Algunas propiedades básicas de los polinomios $P_n(\mu; z)$ son simples consecuencias de la siguiente propiedad extremal que los caracteriza

TEOREMA 1.1 *$P_n(\mu; z)$ es el único polinomio mónico de grado n tal que*

$$\lambda_n(\mu) = \inf_{q(z)=z^n+\cdots} \|q\|^2_{L^2(\mu)}. \tag{1.2}$$

Sea $A \subset \mathbb{C}$. Definimos la *envoltura convexa* de A, que denotaremos por $\mathrm{Co}(A)$, como el menor conjunto convexo que contiene a A. Es fácil ver que

$$\mathrm{Co}(A) = \bigcap_{\substack{A\subset B\subset\mathbb{C} \\ B \text{ convexo}}} B.$$

Los ceros de los polinomios ortogonales juegan un papel muy importante en diversas cuestiones, de ahí la importancia que tiene el estudio del problema referente a la localización de los ceros de dichos polinomios en el plano complejo.

La siguiente es una simple consecuencia del teorema anterior.

TEOREMA 1.2 *Todos los ceros de $P_n(\mu; z)$ están contenidos en $\mathrm{Co}(\mathrm{S}(\mu))$.*

Incluso podemos precisar aún más.

TEOREMA 1.3 *Si $\mathrm{Co}(\mathrm{S}(\mu))$ no es un segmento de recta, entonces, todos los ceros de $P_n(\mu; z)$ se encuentran en el interior de $\mathrm{Co}(\mathrm{S}(\mu))$.*

Si $\mathrm{S}(\mu)$ no es simplemente conexo, entonces pueden existir ceros de $P_n(\mu; z)$ en las componentes conexas acotadas de su complemento. De hecho, todos los ceros pueden estar en dichas componentes.

Dado un subconjunto compacto K de $\mathbb{C}$, sea Ω la componente conexa de $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$ que contiene a ∞. Llamaremos *envoltura convexa polinomial* de K, al compacto $\widehat{K} = \mathbb{C} \setminus \Omega$. Notemos que $\widehat{K}$ se obtiene de K añadiendo a este último todas las componentes conexas acotadas de su complemento. El teorema siguiente nos muestra que la mayor parte de los ceros de los polinomios ortogonales se encuentran en la envoltura convexa polinomial de $\mathrm{S}(\mu)$.

TEOREMA 1.4 *Siendo Ω la componente conexa no acotada de $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathrm{S}(\mu)$ y K un subconjunto compacto de Ω, entonces el número de ceros de $P_n(\mu; z)$ en K está acotado por una constante que no depende de n.*

En el caso real, es decir, si $\mathrm{S}(\mu) \subset \mathbb{R}$, el producto interno usual que μ define sobre el espacio de los polinomios reales

$$\langle p, q\rangle_{L^2(\mu)} = \int p(x)q(x)d\mu(x), \tag{1.3}$$

se caracteriza por ser el único producto interno, respecto al cual el *operador de multiplicación*

$$M : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$$
$$M(q) = xq(x)$$

es simétrico.

De la simetría del operador de multiplicación se derivan varias consecuencias. La más importante de ellas es la relación de recurrencia a tres términos que satisfacen los polinomios ortonormales con respecto a $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2(\mu)}$. Si definimos $p_{-1}(x)=0$, entonces se tiene

$$xp_n(\mu;\ x) = a_{n+1}p_{n+1}(\mu;\ x) + b_n p_n(\mu;\ x) + a_n p_{n-1}(\mu;\ x), \quad n \geq 0 \tag{1.4}$$

donde $a_{n+1}>0,\ b_n\in\mathbb{R}$.

La equivalencia de las tres propiedades siguientes constituye otra consecuencia importante.

1. El operador de multiplicación M está acotado sobre $(\mathcal{P};\ \langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2(\mu)})$.
2. Los ceros de los polinomios ortogonales con respecto a $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2(\mu)}$ están acotados.
3. El soporte de la medida μ es compacto.

La teoría asintótica de polinomios ortogonales trata de identificar clases de polinomios o de medidas, para las que se tiene una u otra forma de relación asintótica. Este estudio requiere del empleo de técnicas de la teoría geométrica de funciones de una variable compleja, el análisis funcional, la teoría de operadores, la teoría de la medida y la teoría de potencial.

Para sucesiones $\{P_n(\mu;\cdot)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ de polinomios ortogonales existe una jerarquía en cuanto a tipos de comportamiento asintótico. Las relaciones asintóticas más comunes son : *asintótica fuerte*, *asintótica del cociente* y *asintótica de la raíz enésima*. Estos tipos de relaciones describen, respectivamente, el comportamiento asintótico cuando $n\to\infty$ de las sucesiones

$$\left\{\frac{P_n(\mu;z)}{\Psi(z)^n}\right\}, \quad \left\{\frac{P_{n+1}(\mu;z)}{P_n(\mu;z)}\right\}, \quad \left\{|P_n(\mu;z)|^{1/n}\right\},$$

en el sentido de la convergencia uniforme sobre compactos contenidos en un cierto conjunto.

En la asintótica fuerte, Ψ es una función seleccionada convenientemente. Debemos señalar que la asintótica fuerte implica la asintótica del cociente y esta, a su vez, la de la raíz enésima. Las implicaciones recíprocas son, en general, falsas.

En [44], los autores introducen la clase **Reg** de medidas *regulares*. Estas son medidas positivas finitas de Borel soportadas sobre subconjuntos compactos del plano complejo, cuyos polinomios ortonormales son la generalización natural, en cuanto a comportamiento asintótico de la raíz enésima se refiere, de los polinomios ortonormales de Jacobi, que son el prototipo de polinomios ortonormales asociados a una medida de soporte compacto. Diremos que los polinomios ortonormales $p_n(\mu;z)$ tienen comportamiento asintótico *regular* de la raíz enésima, si $\mu\in$ **Reg**. En la sección 1.3 se enuncian varias caracterizaciones de las medidas de la clase **Reg** que nos serán de utilidad en los Capítulos 2 y 4.

1.2. Polinomios Extremales

Los espacios normados constituyen el medio ambiente idóneo para la formulación y estudio de muchos problemas de la Teoría de Aproximación. Es en este contexto que presentaremos algunos elementos básicos de dicha teoría. La referencia general para esta sección es [7].

Aquí denotaremos por E a un espacio normado sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, por F a un subespacio de E de dimensión finita, y por $\|g\|$ a la norma de $g \in E$.

TEOREMA 1.5 *Dado un elemento $g \in E$, existe un $f^* \in F$ tal que*

$$\|g - f^*\| \leq \|g - f\|, \quad f \in F.$$

En este teorema, el requerimiento de que F sea de dimensión finita es esencial. Al vector f^*, cuya existencia aseguramos en el teorema anterior, lo llamaremos *elemento de la mejor aproximación* de g a F.

Diremos que E es *estrictamente convexo*, o que $\|\cdot\|$ es una *norma estrictamente convexa*, si

$$\|f\| = \|g\| = \left\|\frac{f+g}{2}\right\| = 1 \Longrightarrow f = g. \tag{1.5}$$

Esto significa geométricamente que $\{f \in E : \|f\| = 1\}$ no contiene segmentos de recta no reducidos a un punto.

Para probar que E es estrictamente convexo, es suficiente probar que

$$\|f + g\| = \|f\| + \|g\| \quad (f \neq 0,\, g \neq 0) \Longrightarrow f = \alpha g \quad (\alpha > 0). \tag{1.6}$$

TEOREMA 1.6 *Si E es estrictamente convexo, entonces, para cada $g \in E$ y cada subespacio F de E, existe un único elemento de la mejor aproximación de g a F.*

La propiedad extremal (1.2) de los polinomios ortogonales mónicos motiva la siguiente definición.

Sea $E = (\mathcal{P}, \|\cdot\|)$, diremos que $q_n(z) = z^n + \cdots$ es un polinomio mónico *extremal* n-ésimo con respecto a $\|\cdot\|$, si

$$\|q_n\| = \text{ínf}\{\, \|q\| : q(z) = z^n + \cdots\}.$$

La existencia de q_n es fácil de probar : $q_n = z^n - q_0$, donde q_0 es un elemento de la mejor aproximación de z^n al subespacio de todos los polinomios de grado menor que n. Si $\|\cdot\|$ es estrictamente convexa, el polinomio q_n es único.

Sea K un subconjunto compacto del plano complejo. En todo lo que sigue, $\|\cdot\|_K$ denotará a la norma del supremo sobre K. Supongamos que K contiene infinitos puntos, entonces para cada $n \geq 0$ existe un único polinomio mónico $T_n(z) = z^n + \cdots$, llamado *polinomio de Chebyshev* de grado n, que cumple

$$\|T_n\|_K = \text{ínf}\{\, \|q\|_K : q(z) = z^n + \cdots\}.$$

Resulta que existe $\text{lím}_{n\to\infty} \|T_n\|_K^{1/n} < +\infty$ (ver [40]). Al valor de este límite lo llamaremos *constante de Chebyshev* de K.

1.3. Teoría de Potencial Logarítmico

Comenzamos esta sección presentando algunos conceptos del Análisis Complejo. Sea $D \subset \mathbb{C}$ un dominio. Llamaremos a una función $u : D \to \mathbb{R}$ *armónica* en D, si $u \in C^2(D)$, y se tiene

$$\triangle u(z) = u_{xx}(z) + u_{yy}(z) = 0, \qquad z = x + iy \in D.$$

Diremos que una función $u : D \to \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$ sobre un dominio $D \subset \mathbb{C}$ la llamaremos *subarmónica* sobre D, si $u \not\equiv -\infty$, es semicontinua superior sobre D, y para todo disco abierto $|z - a| < r$ contenido en D se tiene

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta}) d\theta.$$

Así mismo, diremos que $u : D \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es *superarmónica* en D, si $-u$ es subarmónica.

Teorema 1.7 **(Principio del Máximo)** *Sea u una función subarmónica en un dominio $D \subset \mathbb{C}$.*
(a) Si u alcanza en D el supremo de los valores que toma sobre este conjunto, entonces u es constante.
(b) Si $\limsup_{z \to \xi,\, z \in D} u(z) \leq 0$ para todo $\xi \in \partial D$, entonces $u \leq 0$ en D.

En el teorema anterior hemos asumido que si el dominio D no está acotado, entonces $\infty \in \partial D$.

A continuación presentamos los aspectos esenciales de la Teoría de Potencial que se requieren en los restantes capítulos. Las referencias generales son [40] y [44].

Existe un vínculo natural entre esta teoría y los polinomios: el módulo de un polinomio es la exponencial de un potencial discreto, lo cual hace muy útiles a los potenciales logarítmicos en el estudio del comportamiento asintótico de la raíz enésima de sucesiones de polinomios ortogonales.

Sea K un subconjunto compacto del plano complejo $\mathbb{C}$. Denotemos por $\mathcal{M}(K)$ al conjunto de todas las medidas positivas finitas de Borel μ con soporte $\mathrm{S}(\mu) \subset K$.

Dada $\mu \in \mathcal{M}(K)$, llamaremos *potencial logarítmico* asociado a μ a la función

$$U_\mu(z) = \int_K \log \frac{1}{|z - \xi|} d\mu(\xi),$$

y *energía* asociada a μ al valor

$$I(\mu) = \int_K \int_K \log \frac{1}{|z - \xi|} d\mu(\xi) d\mu(z) = \int_K U_\mu(z) d\mu(z).$$

El potencial U_μ es superarmónico en $\mathbb{C}$ y armónico en $\mathbb{C} \setminus \mathrm{S}(\mu)$.

Al valor ínfimo

$$I(K) = \inf_{\substack{\mu\in\mathcal{M}(K)\\ \mu(K)=1}} I(\mu),$$

lo llamaremos *constante de Robin* o *energía de equilibrio* del compacto K.

Definimos como *capacidad logarítmica* de K al valor

$$\mathrm{C}(K) = e^{-I(K)}.$$

Si $I(K) = +\infty$, entonces $\mathrm{C}(K) = 0$.

Si K contiene infinitos puntos, entonces tenemos la siguiente igualdad

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n\|_K^{1/n} = \mathrm{C}(K). \tag{1.7}$$

Luego, la constante de Chebyshev de K coincide con su capacidad logarítmica.

Si $E \subset \mathbb{C}$ es un conjunto boreliano, su capacidad logarítmica se define como

$$\mathrm{C}(E) = \sup\{\mathrm{C}(K) : \ K \subset E, \ K \, \textit{compacto}\}.$$

Diremos que una propiedad se satisface *cuasi dondequiera* en el conjunto E, si dicha propiedad se satisface en un conjunto A tal que $\mathrm{C}(E \setminus A) = 0$.

Denotemos por $\mathcal{C}(K)$ al conjunto de todas las funciones continuas sobre el compacto $K \subset \mathbb{C}$. Diremos que una sucesión de medidas $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+} \subset \mathcal{M}(K)$ *converge en la topología *-débil de medidas* a $\mu \in \mathcal{M}(K)$, si

$$\lim_{n\to\infty} \int f(x)d\mu_n(x) = \int f(x)d\mu(x), \quad f \in \mathcal{C}(K).$$

El resultado siguiente es de uso frecuente. El nos muestra el efecto que produce la convergencia *-débil de medidas sobre los potenciales logarítmicos.

Teorema 1.8 **(Lower Envelope Theorem)** *Supongamos que K es un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$ y que la sucesión de medidas $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+} \subset \mathcal{M}(K)$ converge en la topología *-débil de medidas a $\mu \in \mathcal{M}(K)$, entonces*

$$U_\mu(z) = \liminf_{n\to\infty} U_{\mu_n}(z)$$

cuasi dondequiera en $\mathbb{C}$.

El siguiente resultado es fundamental en la teoría de potencial.

Teorema 1.9 *Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$, tal que* $\mathrm{C}(K) > 0$. *Entonces existe una única medida de probabilidad $\omega_K \in \mathcal{M}(K)$, tal que*

$$I(\omega_K) = I(K).$$

Llamaremos *medida de equilibrio* del compacto K a la medida ω_K, cuya existencia aseguramos en este teorema. Podemos probar que $\mathrm{S}(\omega_K) \subset \partial \widehat{K}$, es decir, ω_K está soportada sobre la frontera exterior del compacto K.

El siguiente teorema caracteriza a la medida de equilibrio.

TEOREMA 1.10 **(Teorema de Frostman)** *Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$ con capacidad $\mathrm{C}(K) > 0$, entonces*

$$U_{\omega_K}(z) = \begin{cases} \leq I(K), & z \in \mathbb{C}, \\ \\ = I(K), & z \in K \setminus E,\ E \subset \partial K,\ \mathrm{C}(E) = 0. \end{cases}$$

La función de Green constituye un concepto extremadamente útil de la Teoría de Potencial.

Dado un subconjunto compacto K de $\mathbb{C}$ con capacidad positiva, sea $\Omega = \overline{\mathbb{C}} \setminus \widehat{K}$. Llamaremos *función de Green* de Ω con singularidad en el infinito a la función

$$g_\Omega(z; \infty) = I(K) - U_{\omega_K}(z).$$

De la definición resulta que

$$\lim_{z \to \infty} (g_\Omega(z; \infty) - \log |z|) = I(K) = \log \frac{1}{\mathrm{C}(K)}.$$

La función de Green se caracteriza por las propiedades siguientes:

1. $g_\Omega(z; \infty)$ es no negativa, subarmónica en $\mathbb{C}$ y armónica en $\Omega \setminus \{\infty\}$,

2. $g_\Omega(z; \infty) - \log |z|$ está acotada en una vecindad de $z = \infty$,

3. $g_\Omega(z; \infty) = 0$ cuasi dondequiera en $\widehat{K}$.

Si la capacidad de K es cero, entonces, $g(z; \infty) \equiv \infty$.

Sea D un dominio en $\overline{\mathbb{C}}$, tal que $\mathrm{C}(\mathbb{C} \setminus D) > 0$. Sea f una función definida y continua sobre la frontera ∂D de D. El *problema de Dirichlet* en D consiste en hallar una función u, armónica en D y continua en $\overline{D}$, tal que $u|_{\partial D} = f$. Diremos que D es *regular respecto al problema de Dirichlet*, o simplemente que D es *regular*, si para toda función f definida y continua sobre ∂D, existe una solución u del correspondiente problema de Dirichlet. Así mismo, diremos que un subconjunto compacto del plano complejo es regular, si la componente conexa no acotada de su complemento en $\overline{\mathbb{C}}$ es un dominio regular.

A continuación presentamos algunos conceptos necesarios para la comprensión de los resultados sobre la distribución asintótica de ceros (ver [44]).

A todo polinomio P de grado exactamente n asociamos la medida *contadora de ceros normalizada* ν_P, definida por

$$\nu_P = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n} \delta_{z_j},$$

donde $z_1, \cdots, z_n$ son los ceros de P repetidos de acuerdo a su multiplicidad, y δ_{z_j} es la medida de Dirac con masa 1 en el punto z_j.

Diremos que la sucesión de polinomios $\{P_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, *grad* $P_n = n$, tiene *distribución asintótica de ceros* μ, donde μ es una medida boreliana de probabilidad con soporte compacto en $\mathbb{C}$, si

$$\lim_{n\to\infty} \nu_{P_n} = \mu$$

en la topología *-débil de medidas.

Un tipo de comportamiento asintótico estrechamente relacionado con el de comportamiento asintótico regular (de la raíz enésima) es el de distribución asintótica de ceros regular.

Sea μ una medida positiva de Borel con soporte compacto en $\mathbb{C}$ y de capacidad $\mathrm{C}(\mathrm{S}(\mu)) > 0$. Diremos que la sucesión de polinomios ortonormales $p_n(\mu;\cdot)$ tiene *distribución asintótica regular de ceros* , si

$$\lim_{n\to\infty} \nu_{p_n(\mu;\cdot)} = \omega_{\mathrm{S}(\mu)}$$

en la topología *-débil de medidas.

El siguiente teorema permite obtener resultados asintóticos para los ceros de ciertas sucesiones de polinomios.

Teorema 1.11 ([42]) *Sea K un subconjunto compacto en $\mathbb{C}$ con capacidad positiva, y supongamos que $\{P_n\}$ es una sucesión de polinomios mónicos, P_n de grado exactamente n, que satisface las dos condiciones siguientes*

(a) $\limsup_{n\to\infty} \|P_n\|_K^{1/n} \le \mathrm{C}(K)$,

(b) $\lim_{n\to\infty} \nu_{P_n}(A) = 0$ *para todo conjunto cerrado A contenido en el interior de $\widehat{K}$. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \nu_{P_n} = \omega_K$$

*en la topología *-débil de medidas.*

De este teorema se deriva el siguiente resultado.

Corolario 1.3.1 *Sea K un subconjunto compacto en $\mathbb{C}$ con capacidad positiva, interior vacío y complemento conexo. Supongamos que $\{P_n\}$ es una sucesión de polinomios mónicos, P_n de grado exactamente n, que verifica la condición (a) del teorema anterior. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \nu_{P_n} = \omega_K$$

*en la topología *-débil de medidas.*

Como mencionamos anteriormente, en [44] los autores introducen la clase **Reg** de medidas *regulares*. Para una medida μ positiva finita de Borel soportada sobre un subconjunto compacto del plano complejo, ellos prueban que $\mu \in$ **Reg** si y sólo si

$$\lim_{n\to\infty} \|P_n\|_{L^2(\mu)}^{1/n} = \mathrm{C}(\mathrm{S}(\mu)).$$

donde P_n denota el n-ésimo polinomio ortogonal mónico respecto a μ.

En el caso en que $\mathrm{S}(\mu)$ es un conjunto compacto regular, la medida μ pertenece a la clase **Reg** si y sólo si

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\|P_n\|_{\mathrm{S}(\mu)}}{\|P_n\|_{L^2(\mu)}} \right)^{1/n} = 1 \tag{1.8}$$

para toda sucesión de polinomios $\{P_n\}$, $grad\, P_n \le n$, $P_n \not\equiv 0$.

Un resultado análogo se tiene si en (1.8), en lugar de tomar norma L^2, se toma norma L^p, es decir, si $\mathrm{S}(\mu)$ es un conjunto compacto regular y $1 \le p < +\infty$, entonces $\mu \in$ **Reg** si y sólo si

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\|P_n\|_{\mathrm{S}(\mu)}}{\|P_n\|_{L^p(\mu)}} \right)^{1/n} = 1 \tag{1.9}$$

para toda sucesión de polinomios $\{P_n\}$, $grad\, P_n \le n$, $P_n \not\equiv 0$.

Luego, para una medida $\mu \in$ **Reg** soportada sobre un conjunto compacto regular las normas del supremo y L^p, $1 \le p < +\infty$, tienen el mismo comportamiento asintótico de la raíz enésima, en otras palabras, μ no establece distinción entre $L^\infty(\mathrm{S}(\mu))$ y $L^p(\mathrm{S}(\mu))$ en relación a este tipo de comportamiento asintótico.

En los capítulos 2 y 4 necesitaremos el lema siguiente, demostrado en [24].

Lema 1.3.1 *Sea K un subconjunto compacto regular del plano complejo y $\{P_n\}$ una sucesión de polinomios, tal que grad $P_n \le n$ y $P_n \not\equiv 0$. Entonces, para todo $k \in \mathbb{Z}_+$, se cumple*

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{\|P_n^{(k)}\|_K}{\|P_n\|_K} \right)^{1/n} \le 1. \tag{1.10}$$

1.4. Espacios de Hardy

El contexto natural para la investigación de la asintótica fuerte de polinomios ortogonales es la teoría de los espacios de Hardy.

En esta sección introduciremos las notaciones, definiciones y resultados que necesitaremos en el Capítulo 3. La referencia general es [48].

Por Γ denotaremos un arco o curva cerrada de Jordan rectificable de longitud l y por $\mathrm{C}(\Gamma)$ a su capacidad logarítmica. Denotaremos por Ω y $\Phi(z)$, respectivamente, a la componente conexa de $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ que contiene a infinito, y a la transformación conforme de Ω sobre el exterior de la circunferencia con centro en el origen y radio 1, normalizada por

$$\Phi(\infty) = \infty, \quad \lim_{z\to\infty} \frac{\Phi(z)}{z} = \frac{1}{\mathrm{C}(\Gamma)}.$$

Sea f una función definida sobre un intervalo I del eje real que toma valores en $\mathbb{C}$. Diremos que f pertenece a la clase C^{2+}, si $f \in C^2(I)$ y f'' satisface una condición de Lipschitz

$$|f''(x) - f''(y)| \leq M|x-y|^{\alpha},$$

con constantes fijas $M,\ \alpha > 0$ y cualesquiera sean $x,\ y \in I$.

Si Γ es un arco o curva cerrada de Jordan rectificable de longitud l, la parametrización de Γ con respecto a la longitud de arco

$$\xi = \xi(s),\ s \in [0, l]$$

es una función continua. Diremos que $\Gamma \in C^{2+}$, si la función $\xi(s) \in C^{2+}$. En este trabajo asumiremos que $\Gamma \in C^{2+}$.

La condición de *Szegö* juega un papel fundamental en el estudio de la asintótica fuerte de polinomios ortogonales. Si $\mu = \rho(\xi)|d\xi| + \mu_s$ es la descomposición de Lebesgue de μ con respecto a la medida lineal $|d\xi|$ sobre Γ, diremos que μ satisface la *condición de Szegö* sobre Γ, y lo indicaremos por $\mu \in \mathcal{S}(\Gamma)$, si

$$\int_{\Gamma} (\log \rho(\xi)) |\Phi'(\xi)| |d\xi| > -\infty. \tag{1.11}$$

Esta desigualdad implica que $\rho > 0$ casi dondequiera sobre Γ.

Si μ es absolutamente continua respecto a $|d\xi|$ y verifica (1.11), escribiremos $\rho \in \mathcal{S}(\Gamma)$ y, en este caso, usaremos siempre ρ en lugar de μ en la notación de normas, polinomios y del espacio L^2.

En lo que resta de sección, supondremos que μ es tal que $\rho \in S(\Gamma)$.

Para dar un tratamiento unificado a los casos de una curva cerrada o de un arco, vamos a considerar un arco de Jordan rectificable como una cortadura sobre el plano complejo con dos lados. Si Γ es un arco y f es una función analítica en Ω que tiene valores frontera en casi todo punto de Γ (respecto a la medida lineal de Lebesgue) cuando nos acercamos a este por cada uno de sus dos lados, denotaremos por f_+ y f_- a los valores frontera de f a ambos lados de Γ. Si f_+ y f_- son integrables sobre Γ respecto al peso ρ, definimos la integral

$$\oint_{\Gamma} f(\xi)\rho(\xi)|d\xi| = \int_{\Gamma} f_+(\xi)\rho(\xi)|d\xi| + \int_{\Gamma} f_-(\xi)\rho(\xi)|d\xi|.$$

Si Γ es una curva cerrada, f es una función analítica en Ω que tiene valores frontera $f(\xi)$ en casi todo $\xi \in \Gamma$, y $f(\xi)$ es integrable con respecto a ρ, definimos la integral

$$\oint_{\Gamma} f(\xi)\rho(\xi)|d\xi| = \int_{\Gamma} f(\xi)\rho(\xi)|d\xi|.$$

Denotemos por $\Gamma_r = \Phi^{-1}\left(\{w \in \mathbb{C} : |w| = r\}\right), \ r > 1$, a las curvas de nivel de la transformación conforme Φ. Como $\Gamma \in C^{2+}$, por un teorema de Caratheodory (ver [37], Capítulo 2), tanto Φ como Φ^{-1} tienen extensiones inyectivas y continuas a las fronteras de sus respectivos dominios de definición (considerando, en el caso en que Γ es un arco, que tiene dos lados) y $|\Phi(\xi)| = 1$ ($|\Phi_{\pm}(\xi)| = 1$ si Γ es un arco) para casi todo $\xi \in \Gamma$.

Como $\rho \in S(\Gamma)$, existe una única función $D(\rho; \cdot)$ analítica en Ω (que llamaremos *función de Szegö*) que cumple

1. $D(\rho; z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$,
2. $D(\rho; \infty) > 0$,
3. $D(\rho; \cdot)$ tiene límite no tangencial $D(\rho; \xi)$ ($D_{\pm}(\rho; \xi)$ si Γ es un arco) para casi todo $\xi \in \Gamma$, y $|D(\rho; \xi)| = \rho(\xi)$ ($|D_{\pm}(\rho; \xi)| = \rho(\xi)$).

Siendo $g(z; \infty) = \ln|\Phi(z)| - \ln \mathrm{C}(\Gamma)$ la función de Green de Ω con singularidad en el infinito, y denotando por $\partial/\partial\eta_\xi$ a la derivada en la dirección del vector normal η_ξ en el punto $\xi \in \Gamma$, dirigido hacia el interior de Ω, tenemos que

$$D(\rho; \infty) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\oint_\Gamma \ln\rho(\xi)\frac{\partial g(\xi; \infty)}{\partial\eta_\xi}|d\xi|\right\}. \tag{1.12}$$

Diremos que la función f, analítica en Ω, pertenece a la clase $E^1(\Omega)$, si

$$\sup_{r>1}\oint_{\Gamma_r}|f(z)||dz| < \infty.$$

Denotaremos por $H^2(\Omega, \rho)$ al espacio de todas las funciones f analíticas en Ω, tales que $f^2 D(\rho; \cdot) \in E^1(\Omega)$.

Toda $f \in H^2(\Omega, \rho)$ posee límite no tangencial $f(\xi)$ ($f_{\pm}(\xi)$ si Γ es un arco) en casi todo punto $\xi \in \Gamma$. Además, $f(\xi) \in L^2(\rho)$ ($f_{\pm}(\xi) \in L^2(\rho)$).

El producto interno

$$\langle f, g\rangle_{H^2(\Omega,\rho)} = \oint_\Gamma f(\xi)\overline{g(\xi)}\rho(\xi)|d\xi| \tag{1.13}$$

hace de $H^2(\Omega, \rho)$ un espacio de Hilbert.

Del teorema de representación de Riesz concluimos la existencia (ver [48], página 173) de una única función $K(t, z)$, llamada *núcleo reproductor de Szegö*, tal que

$$f(z) = \langle f, K(., z)\rangle_{H^2(\Omega,\rho)}, \quad z \in \Omega, \quad f \in H^2(\Omega, \rho). \tag{1.14}$$

Como ya convenimos en la sección 1.1, si μ es una medida positiva finita de Borel soportada sobre Γ, denotamos por $P_n(\mu; z)$ al n-ésimo polinomio ortogonal mónico respecto a μ, y

$$\lambda_n(\mu) = \int_\Gamma |P_n(\mu; \xi)|^2 d\mu(\xi) = \inf_{P(z)=z^n+\cdots}\int_\Gamma |P(\mu; \xi)|^2 d\mu(\xi). \tag{1.15}$$

Denotemos por $\|\cdot\|_{H^2(\Omega,\rho)}$ a la norma inducida por (1.13). Reformulando convenientemente la propiedad extremal (1.15) (ver [19], [5]), obtenemos el problema extremal

$$\nu(\rho) = \text{ínf}\{\, \|f\|^2_{H^2(\Omega,\rho)} : f \in H^2(\Omega,\rho),\ f(\infty) = 1\}. \tag{1.16}$$

Denotemos por $\mathcal{F}$ a la solución de este último problema. Tenemos (ver [48], §6 y §7)

$$\mathcal{F}^2(z) \;=\; \Phi'(z)\frac{D(\rho;\infty)}{D(\rho;z)}, \quad z \in \Omega,$$

$$\nu(\rho) = 2\pi D(\rho;\infty)\mathrm{C}(\Gamma), \tag{1.17}$$

$$\mathcal{F}(z) = \nu(\rho)K(z,\infty), \quad z \in \Omega. \tag{1.18}$$

La función y constante extremales $\mathcal{F}$ y $\nu(\rho)$ están íntimamente ligadas a la asintótica de los polinomios ortogonales $P_n(\rho;z)$ a través de las relaciones

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n(\rho)}{\mathrm{C}(\Gamma)^{2n}} = \nu(\rho), \tag{1.19}$$

$$P_n(\rho;z) = [\mathrm{C}(\Gamma)\Phi(z)]^n \mathcal{F}(z)(1+\varepsilon_n(z)), \quad \varepsilon_n(z) \rightrightarrows 0 \ en\ \Omega. \tag{1.20}$$

En este trabajo denotamos por el símbolo $\rightrightarrows$ a la convergencia uniforme de la sucesión considerada sobre subconjuntos compactos de la región indicada.

En [5] los autores consideran el producto de Sobolev discreto

$$\begin{aligned} \langle p,q\rangle_S &= \int_\Gamma p(\xi)\,\overline{q(\xi)}\rho(\xi)|d\xi| + p(Z)Aq(Z)^*, \\ p(Z) &= \left(p(z_1),\cdots,p^{(l_1)}(z_1),\cdots,p(z_m),\cdots,p^{(l_m)}(z_m)\right), \end{aligned} \tag{1.21}$$

donde $\{z_1,\cdots,z_m\} \subset \Omega$ es un conjunto fijo, $l_i \in \mathbb{Z}_+$ $(i = 1,\cdots,m)$, $p(Z)^*$ es el vector transpuesto conjugado de $p(Z)$ y A es una matriz hermítica definida positiva de orden $M = m + \sum_{j=1}^m l_j$.

En dicho trabajo se considera el problema extremal

$$\nu^*(\rho) = \min_{f\in\widetilde{H}} \|f\|^2_{H^2(\Omega,\rho)}, \tag{1.22}$$

donde $\widetilde{H} = \left\{f \in H^2(\Omega,\rho) :\ f(\infty) = 1,\ f^{(j)}(z_i) = 0,\ j = 0,\cdots,l_i,\ i = 1,\cdots,m\right\}$.

Denotemos por $\mathcal{F}^*$ a la solución de (1.22). Existe una estrecha relación entre las constantes y funciones extremales de los problemas (1.16) y (1.22) (ver [19], [21]) dada por

$$\mathcal{F}^*(z) = B(z)\mathcal{F}(z), \tag{1.23}$$

$$\nu^*(\rho) = \nu(\rho) \prod_{i=1}^{m} |\Phi(z_i)|^{2(l_i+1)}, \tag{1.24}$$

donde

$$B(z) = \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{\Phi(z) - \Phi(z_i)}{\Phi(z)\overline{\Phi(z_i)} - 1} \frac{|\Phi(z_i)|^2}{\Phi(z_i)} \right)^{l_i+1}$$

posee las propiedades que enumeramos a continuación:

1. $B \in H^2(\Omega, \rho),\ B(\infty) = 1,$
2. $B^{(j)}(z_i) = 0,\ j = 0\,, \cdots, l_i,\ i = 1, \cdots, m,$
3. $|B(\xi)| = \prod_{i=1}^m |\Phi(z_i)|^{l_i+1},\ \xi \in \Gamma,\ (|B_\pm(\xi)| = \prod_{i=1}^m |\Phi(z_i)|^{l_i+1}$, si Γ es un arco).

Denotemos por L_n al n-ésimo polinomio ortogonal mónico respecto al producto de Sobolev discreto (1.21), y sea $\tau_n = \|L_n\|_S^2$, donde $\|\cdot\|_S$ es la norma inducida por dicho producto.

En [5] se prueba que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n(\rho)}{\tau_n} = \prod_{i=1}^{m} |\Phi(z_i)|^{-2(l_i+1)}, \tag{1.25}$$

y que la relación de la función y constante extremales $\mathcal{F}^*$ y $\nu^*(\rho)$ con el comportamiento asintótico de los polinomios ortogonales L_n está dada por

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tau_n}{\mathrm{C}(\Gamma)^{2n}} = \nu^*(\rho), \tag{1.26}$$

$$L_n(z) = [\mathrm{C}(\Gamma)\Phi(z)]^n \mathcal{F}^*(z)(1 + \varepsilon_n(z)), \quad \varepsilon_n(z) \rightrightarrows 0\ en\ \Omega. \tag{1.27}$$

Notemos que las fórmulas asintóticas (1.26) y (1.27) coinciden con las dadas en (1.19) y (1.20) para $\lambda_n(\rho)$ y $P_n(\rho, z)$ respectivamente; sólo cambian la constante y función extremales.

Para obtener los resultados sobre comportamiento asintótico fuerte del Capítulo 3, necesitaremos los resultados siguientes. El primero (ver [48], Cor. 7.4) nos muestra cómo para funciones de $H^2(\Omega, \rho)$, estimados sobre Γ implican estimados en Ω. El segundo es un caso particular del Lema 12.1 en [48].

1. Sea $K \subset \Omega$ un conjunto compacto. Entonces existe una constante A, que sólo depende de K, tal que para toda $f \in H^2(\Omega, \rho)$ se tiene

$$\max_{z\in K} |f(z)|^2 \le A\|f\|^2_{H^2(\Omega,\rho)}. \tag{1.28}$$

2. Cuando $n \to \infty$, se cumple que

$$\int_\Gamma \Phi_+^n(\xi)\Phi_-^{-n}(\xi)K_+(\xi, z_1)\overline{K_-(\xi, z_2)}\rho(\xi)|d\xi| = \circ(1) \tag{1.29}$$

uniformemente para z_1 y z_2 en cualquier subconjunto compacto de Ω.

Capítulo 2:

POLINOMIOS ORTOGONALES DE SOBOLEV EN $\mathbb{C}$

Capítulo 2

POLINOMIOS ORTOGONALES DE SOBOLEV EN $\mathbb{C}$

Sea $\{\mu_j\}_{j=0}^N$ una familia de $N+1$ medidas positivas finitas de Borel. Asumiremos que para cada $j = 0, \cdots, N$, el soporte $\mathrm{S}(\mu_j)$ de μ_j es un subconjunto compacto del plano complejo $\mathbb{C}$, y que $\mathrm{S}(\mu_0)$ contiene infinitos puntos. Si p, q son polinomios, definimos

$$\langle p, q\rangle_S = \sum_{j=0}^{N} \int p^{(j)}(z)\overline{q^{(j)}(z)}d\mu_j(z) = \sum_{j=0}^{N} \langle p^{(j)}, q^{(j)}\rangle_{L^2(\mu_j)}. \tag{2.1}$$

Obviamente, esta expresión define un producto interno sobre el espacio vectorial $\mathcal{P}$ de todos los polinomios que llamaremos *producto interno de Sobolev*. Siempre que en este capítulo hagamos referencia a un producto interno de Sobolev, entenderemos que nos referimos a uno de la forma anterior. Al compacto $\Delta = \bigcup_{j=0}^N \mathrm{S}(\mu_j)$ lo llamaremos *soporte* del producto interno de Sobolev. Notemos que $\langle\cdot,\cdot\rangle_S$ se puede reescribir en la forma

$$\langle p, q\rangle_S = \sum_{j=0}^{N} \int p^{(j)}(z)\overline{q^{(j)}(z)}\lambda_j(z)d\mu(z) = \sum_{j=0}^{N} \langle p^{(j)}, q^{(j)}\rangle_{L^2(\lambda_j\, d\mu)}, \tag{2.2}$$

donde $\mu = \sum_{j=0}^N \mu_j$ y λ_j es la derivada de Radon-Nikodym de μ_j con respecto a μ.

El producto interno (2.1) define una única sucesión de polinomios ortogonales mónicos con un representante de cada grado. Denotaremos por Q_n al correspondiente polinomio ortogonal mónico de grado n. La sucesión $\{Q_n\}$ se llama *sucesión de polinomios ortogonales mónicos de Sobolev* relativa a (2.1).

En [24] se consideró el producto interno (2.1) para el caso real, es decir, cuando las medidas μ_j que lo definen están soportadas sobre el eje real. Este capítulo tiene por objetivo extender esos resultados al caso en que las medidas involucradas en el producto interno están soportadas sobre subconjuntos compactos del plano complejo.

2.1. Localización de ceros

La norma de $q \in \mathcal{P}$ inducida por (2.1) es

$$\|q\|_S = \left(\sum_{j=0}^{N} \int |q^{(j)}(z)|^2 \, d\mu_j(z) \right)^{1/2} = \left(\sum_{j=0}^{N} \|q^{(j)}\|^2_{L^2(\mu_j)} \right)^{1/2}. \tag{2.3}$$

Comencemos mostrando (ver [24]) cómo se vinculan los ceros de los polinomios ortogonales mónicos de Sobolev Q_n con el operador de multiplicación M. Recordemos que el operador M se define sobre $(\mathcal{P}, \langle \cdot, \cdot \rangle_S)$ por

$$M(q) = zq(z).$$

Supongamos que M está acotado sobre $\mathcal{P}$, o sea, que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|M(q)\|_S \leq C\|q\|_S,$$

y sea

$$q_n(z) = Q_n(z)/\|Q_n\|_S, \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

el n-ésimo polinomio ortonormal de Sobolev. La sucesión $\{q_n\}$ constituye un sistema ortonormal completo en $\mathcal{P}$. Por tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$zq_{n-1}(z) = \sum_{k=0}^{n} c_{k,n-1} q_k(z), \tag{2.4}$$

donde

$$c_{k,n-1} = \langle zq_{n-1}, q_k \rangle_S, \quad k = 0, \cdots, n.$$

La matriz de Hessenberg infinita

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & c_{0,2} & \cdots & c_{0,n-2} & c_{0,n-1} & \cdots \\ c_{1,0} & c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n-2} & c_{1,n-1} & \cdots \\ 0 & c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n-2} & c_{2,n-1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-2,n-2} & c_{n-2,n-1} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-1,n-2} & c_{n-1,n-1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

es la representación matricial de M con respecto a $\{q_n\}$ (ver [1], página 50).

Si $\mathcal{D}_n$ es la sección principal de orden $n \times n$ de $\mathcal{D}$ y

$$\overline{q}_n(z) = (q_0(z), q_1(z), \cdots, q_{n-1}(z))^t,$$

donde por $(\cdot)^t$ denotamos el vector transpuesto del vector o de la matriz $(\cdot)$, podemos reescribir la relación (2.4) en la forma matricial

$$z\overline{q}_n(z) = \mathcal{D}_n^t \overline{q}_n(z) + c_{n,n-1}(0, \cdots, 0, q_n(z))^t. \tag{2.6}$$

De esta última igualdad conclUímos que cada cero de q_n es un valor propio de $\mathcal{D}_n^t$. Pero $\mathcal{D}_n^t$ y $\mathcal{D}_n$ tienen los mismos valores propios. Luego, los ceros de Q_n son valores propios de la sección principal de orden $n \times n$ de la representación matricial $\mathcal{D}$ del operador de multiplicación M.

Notemos que en (2.4) el número de términos crece con n. Si $N = 0$ en el producto (2.1), estamos en presencia de la ortogonalidad usual. Si además se tiene $\mathrm{S}(\mu) \subset \mathbb{R}$, (2.4) coincide con la relación de recurrencia a tres términos (1.4), y la matriz de Hessenberg (2.5) es la matriz de Jacobi

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} b_0 & a_1 & 0 & 0 & \cdots \\ a_1 & b_1 & a_2 & 0 & \cdots \\ 0 & a_2 & b_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

De la acotación del operador de multiplicación M sobre $\mathcal{P}$ se deriva una consecuencia muy importante en relación con la localización de los ceros de los polinomios ortogonales de Sobolev.

Teorema 2.1 *Supongamos que existe una constante positiva C tal que*

$$\|M(q)\|_S \leq C\|q\|_S.$$

Entonces todos los ceros de los polinomios ortogonales de Sobolev están contenidos en el disco $\{z : |z| \leq C\}$.

La demostración que damos a continuación, válida también para el caso de ortogonalidad en sentido usual, es muy elegante y simple si se compara con la dada para un teorema análogo en [24].

Demostración. Sea Q_n el n-ésimo polinomio ortogonal de Sobolev. Como él no puede ser ortogonal a sí mismo, es de grado n. Sea z_0 uno de sus ceros. Es obvio que existe un polinomio q de grado $n-1$, tal que $zq = z_0 q + Q_n$. Como Q_n es ortogonal a q, usando la acotación del operador de multiplicación, se obtiene

$$|z_0|\|q\|_S = \|z_0 q\|_S \leq \|zq\|_S \leq C\|q\|_S.$$

Simplificando $\|q\|_S (\neq 0)$ en la desigualdad anterior, obtenemos la cota indicada para $|z_0|$ independientemente de n. $\square$

En [24] los autores introdujeron una clase de productos internos de Sobolev para la que el operador M está acotado: la clase de los productos internos secuencialmente dominados. Esta definición se extiende sin modificación alguna al caso complejo.

Diremos que el producto interno de Sobolev (2.1) es *secuencialmente dominado* si

$$\mathrm{S}(\mu_j) \subset \mathrm{S}(\mu_{j-1}) \ , \qquad j = 1, \cdots, N,$$

y

$$d\mu_j = f_{j-1} d\mu_{j-1} \ , \qquad f_{j-1} \in L^\infty(\mu_{j-1}) \ , \qquad j = 1, \cdots, N.$$

Si escribimos el producto interno de Sobolev en la forma (2.2), la condición de dominación secuencial es

$$\lambda_j / \lambda_{j-1} \in L^\infty(\mu), \qquad j = 1, \cdots, N.$$

Por ejemplo, si en el producto interno (2.1) todas las medidas son iguales, entonces él es secuencialmente dominado.

Teorema 2.2 *Supongamos que el producto interno de Sobolev (2.1) es secuencialmente dominado, entonces, para cada $q \in \mathcal{P}$ se tiene*

$$\|M(q)\|_S \leq C \|q\|_S, \tag{2.7}$$

donde

$$C = (2[C_1^2 + (N+1)^2 C_2])^{1/2} \ , \tag{2.8}$$

y

$$C_1 = \max_{z \in \mathrm{S}(\mu_0)} |z| \ , \qquad C_2 = \max_{j=0,\cdots,N-1} \|f_j\|_{L^\infty(\mu_j)} \ .$$

Demostración. Tomemos C_1 y C_2 como en el enunciado del teorema. Entonces, para cualquier polinomio q, cálculos directos nos conducen a los estimados

$$\begin{aligned}
\|M(q)\|_S^2 &= \|zq\|_S^2 = \sum_{j=0}^{N} \|(zq)^{(j)}\|_j^2 = \sum_{j=0}^{N} \|zq^{(j)} + jq^{(j-1)}\|_j^2 \\
&\leq 2 \sum_{j=0}^{N} (\|zq^{(j)}\|_j^2 + j^2 \|q^{(j-1)}\|_j^2) \\
&\leq 2 \sum_{j=0}^{N} (C_1^2 \|q^{(j)}\|_j^2 + j^2 C_2 \|q^{(j-1)}\|_{j-1}^2) \\
&\leq 2[C_1^2 + (N+1)^2 C_2] \sum_{j=0}^{N} \|q^{(j)}\|_j^2 = C^2 \|q\|_S^2.
\end{aligned}$$

□

El operador de multiplicación puede estar acotado aún cuando el producto interno de Sobolev no sea secuencialmente dominado. En [39] y [38] se dan otras condiciones sobre las medidas involucradas en el producto de Sobolev que garantizan la acotación de M.

Resulta que, siendo la dominación secuencial una condición suficiente para la acotación del operador de multiplicación, no está lejos de ser también una condición necesaria.

Recordemos que dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ sobre un espacio vectorial E se dicen equivalentes, si existen constantes positivas C_1 y C_2, tales que

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1, \qquad x \in E.$$

Si un producto interno de Sobolev define sobre $\mathcal{P}$ una norma equivalente a otra que a su vez está definida por un producto interno de Sobolev secuencialmente dominado, diremos que el producto interno de Sobolev original, o la norma de Sobolev correspondiente, es *esencialmente secuencialmente dominada*.

Es obvio que un producto interno de Sobolev esencialmente secuencialmente dominado también satisface (2.7) con una constante C, que en general es diferente a la dada en (2.8). En otras palabras, el operador de multiplicación está acotado respecto a un producto interno de Sobolev esencialmente secuencialmente dominado.

En [39] el autor prueba que para productos internos de Sobolev soportados sobre el eje real, la acotación del operador M implica que la norma de Sobolev correspondiente es esencialmente secuencialmente dominada. Posteriormente, en [3] este resultado se generaliza al caso en que las medidas que definen el producto interno de Sobolev están soportadas sobre subconjuntos compactos del plano complejo $\mathbb{C}$, como indica el siguiente teorema.

TEOREMA 2.3 *El operador de multiplicación está acotado respecto al producto interno de Sobolev (2.1) si y sólo si existe una familia de medidas* $\{\mu'_j\}_{j=0}^N$ *que define una norma de Sobolev secuencialmente dominada, la cual es equivalente a la norma inducida por (2.1). Además, en este caso podemos tomar* $\{\mu'_j\}_{j=0}^N$ *tal que* $\mu'_j = \mu_j + \mu_{j+1} + \cdots + \mu_N$.

Si tenemos escrito el producto interno de Sobolev en la forma (2.2), entonces el operador M está acotado sobre $\mathcal{P}$ si y sólo si la norma inducida por (2.2) es equivalente a la norma correspondiente al producto interno de Sobolev

$$\langle p, q\rangle_S = \sum_{j=0}^{N} \int p^{(j)}(z)\overline{q^{(j)}(z)}\tilde{\lambda}_j(z)d\mu(z),$$

donde

$$\tilde{\lambda}_j = \lambda_j + \lambda_{j+1} + \cdots + \lambda_N.$$

De lo anterior concluimos que, en lo que concierne a la acotación del operador de multiplicación, la dominación secuencial resulta ser una restricción natural.

El resultado siguiente nos indica claramente que el Teorema 2.1 está lejos aún de dar una respuesta definitiva al problema de la acotación de los ceros de los polinomios ortogonales de Sobolev planteado en la Introducción. Este problema, de vital importancia en el estudio del comportamiento asintótico de la raíz enésima de dichos polinomios, permanece aún abierto.

Recordemos que $\mathrm{Co}(K)$ denota a la envoltura convexa de un conjunto compacto $K \subset \mathbb{C}$.

TEOREMA 2.4 *Supongamos que $N = 1$ en (2.1), $\mathrm{S}(\mu_0)$ y $\mathrm{S}(\mu_1)$ están contenidos en el eje real y*

$$\mathrm{Co}(\mathrm{S}(\mu_0)) \cap \mathrm{Co}(\mathrm{S}(\mu_1)) = \emptyset.$$

Entonces, para todo $n \geq 2$, los ceros de Q_n' son simples y están contenidos en el interior de $\mathrm{Co}(\mathrm{S}(\mu_0) \cup \mathrm{S}(\mu_1))$, y los ceros de los polinomios ortogonales de Sobolev se encuentran en el disco con centro en el punto extremo de $\mathrm{Co}(\mathrm{S}(\mu_1))$ más alejado de $\mathrm{S}(\mu_0)$ y radio igual al doble del diámetro de $\mathrm{Co}(\mathrm{S}(\mu_0) \cup \mathrm{S}(\mu_1))$.

Para la demostración de este teorema necesitamos de algunos lemas auxiliares. Sea I un intervalo (abierto o cerrado) del eje real y sea q un polinomio. Por $c(q; I)$ y $\kappa(q; I)$ denotaremos, respectivamente, al número de ceros y al número de cambios de signo que tiene el polinomio q sobre el intervalo I.

LEMA 2.1.1 *Sea I un intervalo del eje real y q un polinomio tal que grad $q = l \geq 1$. Entonces se cumple*

$$c(q; I) + c(q'; \mathbb{C} \setminus I) \leq l.$$

Demostración. Del Teorema de Rolle deducimos que

$$c(q; I) \leq c(q'; I) + 1.$$

Por lo tanto,

$$c(q; I) + c(q'; \mathbb{C} \setminus I) \leq c(q'; I) + 1 + c(q'; \mathbb{C} \setminus I) = c(q'; \mathbb{C}) + 1 = l,$$

como se quería probar. □

En el lema siguiente asumimos que en el producto interno (2.1) todas las medidas μ_j están soportadas sobre el eje real. Como hicimos anteriormente, denotamos por Q_n al n-ésimo polinomio ortogonal mónico de Sobolev respecto a este producto. En lo que sigue, denotaremos por $(\cdot)^o$ al interior del conjunto entre paréntesis con respecto a la topología usual de $\mathbb{R}$.

LEMA 2.1.2 *Para todo $n \geq 1$ se cumple*

$$\kappa(Q_n; (\mathrm{Co}(\mathrm{S}(\mu_0)))^o) \geq 1.$$

Demostración. Si por el contrario, Q_n no cambia de signo sobre el conjunto indicado, inmediatamente obtenemos una contradicción del hecho de que Q_n es ortogonal a 1, puesto que entonces

$$0 = \langle Q_n, 1\rangle_S = \int Q_n(x) d\mu_0(x) \neq 0. \qquad \square$$

En lo que resta de esta sección, restringiremos nuestra atención al caso considerado en el Teorema 2.4, es decir, cuando $N = 1$, los soportes de μ_0 y μ_1 están contenidos en el eje real y sus envolturas convexas no se intersecan.

LEMA 2.1.3 *Bajo las hipótesis del Teorema 2.4, para $n \geq 1$ se cumple que*

$$\kappa(Q_n; (\mathrm{Co}(\mathrm{S}(\mu_0)))^o) + \kappa(Q_n'; (\mathrm{Co}(\mathrm{S}(\mu_1)))^o) \geq n - 1. \tag{2.9}$$

Demostración. Del Lema 2.1.2 concluimos que la afirmación es cierta para $n = 1, 2$.
Sea $n \geq 3$ y supongamos que no se cumple (2.9). Es decir, tenemos que

$$\kappa(Q_n; (\mathrm{Co}(\mathrm{S}(\mu_0)))^o) + \kappa(Q_n'; (\mathrm{Co}(\mathrm{S}(\mu_1)))^o) = l \leq n - 2. \tag{2.10}$$

Sin pérdida de generalidad podemos limitarnos a considerar el caso en que

$$\mathrm{Co}(\mathrm{S}(\mu_0)) = [a, b], \qquad \mathrm{Co}(\mathrm{S}(\mu_1)) = [c, d], \qquad b < c.$$

El otro caso se reduce a este mediante un cambio de variables lineal conveniente.

Sea x_0 el punto de $]a, b[$ más cercano a $[c, d]$ donde Q_n cambia de signo. El Lema 2.1.2 garantiza la existencia de este punto.

Hay dos posibilidades

$$Q_n'(x_0 + \epsilon) Q_n'(c + \epsilon) > 0, \tag{2.11}$$

o

$$Q_n'(x_0 + \epsilon) Q_n'(c + \epsilon) < 0 \tag{2.12}$$

para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño. Consideremos por separado cada caso.

Supongamos que se cumple (2.11). Sea q un polinomio de grado menor o igual que l con coeficientes reales, no idénticamente nulo, que tiene un cero en cada punto de $]a, b[$ donde Q_n cambia de signo, y cuya derivada tiene un cero en cada punto de $]c, d[$ donde Q_n' cambia de signo. La existencia de tal polinomio q se reduce a resolver un sistema de l ecuaciones con $l+1$ incógnitas (los coeficientes de q). De esta forma, siempre existe una solución no trivial. Notemos que

$$l \leq c(q;]a, b[) + c(q';]c, d[),$$

con desigualdad estricta, si q (respectivamente q') tiene sobre $]a, b[$ (respectivamente sobre $]c, d[$) ceros de multiplicidad mayor que uno o distintos de aquellos que hemos asignado por construcción. Por otro lado, según el Lema 2.1.2, el grado de q es al menos 1; por consiguiente, aplicando el Lema 2.1.1, tenemos que

$$c(q;]a,b[) + c(q';]c,d[) \leq grad\ q \leq l.$$

Las dos últimas desigualdades implican que

$$l = c(q;]a,b[) + c(q';]c,d[) = grad\ q.$$

Por lo tanto, qQ_n y $q'Q'_n$ tienen signo constante sobre $[a,b]$ y $[c,d]$ respectivamente. Podemos escoger q de forma tal que $qQ_n \geq 0$ en $[a,b]$ (si esto no fuera así, sustituimos q por $-q$). Esta selección de q implica que $q'(x_0+\epsilon)Q'_n(x_0+\epsilon) > 0$ para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño.
Por un lado, todos los ceros de q' están contenidos en $]a,x_0[\cup]c,d[$, por lo que q' preserva su signo en todo el intervalo $]x_0, c+\epsilon[$ para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño. Por otro lado, estamos en el caso (2.11), donde Q'_n tiene el mismo signo a la derecha de x_0 y de c. Luego, $q'Q'_n$ también tiene el mismo signo a la derecha de x_0 y de c. Por lo tanto, $q'Q'_n \geq 0$ sobre $[c,d]$.
Como $grad\ q \leq n-2$, teniendo en cuenta la ortogonalidad, obtenemos la contradicción

$$0 = \int q(x)Q_n(x)d\mu_0(x) + \int q'(x)Q'_n(x)d\mu_1(x) > 0.$$

De esta manera, no se cumple (2.11) si (2.10) es cierta.

Supongamos que estamos en la situación (2.12). Ahora la diferencia consiste en que a la derecha de x_0 y c el polinomio Q'_n tiene signos diferentes. En este caso construímos q de grado menor o igual que $l+1$ con coeficientes reales y no idénticamente nulo con las mismas condiciones de interpolación dadas anteriormente, exigiendo además que $q'(c) = 0$. Siguiendo la misma línea de razonamiento del caso anterior, tenemos que qQ_n y $q'Q'_n$ conservan sus signos sobre $[a,b]$ y $[c,d]$ respectivamente. Tomando q de forma tal que $qQ_n \geq 0$ sobre $[a,b]$, podemos ver que también $q'Q'_n \geq 0$ sobre $[c,d]$. Como $grad\ q = l+1 \leq n-1$ (ver 2.10), teniendo en cuenta la ortogonalidad obtenemos que (2.12) no es posible bajo la suposición (2.10). Pero (2.11) o (2.12) debe ser cierta. Luego, concluimos que (2.9) tiene que ser cierta. □

COROLARIO 2.1.1 *Sea* $I = \mathrm{Co}(\mathrm{S}(\mu_0) \cup \mathrm{S}(\mu_1)) \setminus (\mathrm{Co}(\mathrm{S}(\mu_0)) \cup \mathrm{Co}(\mathrm{S}(\mu_1)))$. *Bajo las condiciones del Teorema 2.4 se cumple*

$$c(Q_n; I) + c(Q'_n; I) \leq 1.$$

Demostración. Es una consecuencia inmediata de los Lemas 2.1.1 y 2.1.3 aplicados a Q_n. □

Demostración del Teorema 2.4. Emplearemos la notación introducida en la demostración del Lema 2.1.3. De acuerdo con los Lemas 2.1.1 y 2.1.3, tenemos

$$n-1 \leq l = \kappa(Q_n;]a,b[) + \kappa(Q'_n;]c,d[) \leq n.$$

Si $l = n$, del Teorema de Rolle concluimos que todos los ceros de Q'_n son simples y están contenidos en $]a, b[\cup]c, d[$, lo cual implica nuestra primera afirmación en la tesis del teorema.

Supongamos que $l = n - 1$. Consideremos los mismos dos casos (2.11) y (2.12) analizados en la demostración del Lema 2.1.3. Siguiendo los mismos argumentos empleados en dicha demostración, podemos ver fácilmente que (2.11) no es posible con $l = n - 1$. Si se cumple (2.12), entonces Q'_n tiene un cero extra en el intervalo $[x_0, c]$, y aplicando nuevamente el Teorema de Rolle, tenemos que todos los ceros de Q'_n son simples y están contenidos en $]a, d[$.

Para probar la segunda parte del Teorema 2.4, usaremos el *Teorema de Apolaridad de Grace*. Según este teorema, si q es un polinomio de grado mayor o igual que dos, z_0 y z_1 son dos ceros cualesquiera de q y r es la mediatriz del segmento que los une, entonces q' tiene al menos un cero en cada uno de los semiplanos cerrados en los que la recta r divide el plano complejo. Para la demostración de este resultado, ver el Teorema 1.4.7 en [35] (ver también [4], páginas 23-24).

Para $n = 1$ la segunda afirmación es cierta, debido a que del Lema 2.1.2 conocemos que Q_n tiene un cero en $]a, b[$ para todo $n \geq 1$.

Sea $n \geq 2$. Si Q_n tuviera un cero fuera del círculo con centro en d y radio $2|a - d|$, entonces, por el Teorema de Apolaridad de Grace, Q'_n debiera tener un cero fuera del segmento $]a, d[$, lo cual contradice la primera afirmación del teorema. Por lo tanto, todos los ceros de Q_n se encuentran en el conjunto indicado. □

Finalizamos esta sección haciendo dos observaciones.

La primera tiene que ver con los argumentos usados en la demostración del Lema 2.1.3. Estos nos permiten deducir otras propiedades interesantes que se asemejan a aquellas que son satisfechas por los polinomios ortogonales en sentido usual. Por ejemplo, el intervalo que une dos ceros consecutivos de Q_n sobre $]a, b[$ interseca a $\mathrm{S}(\mu_0)$. Análogamente, el intervalo que une dos ceros consecutivos de Q'_n sobre $]c, d[$ interseca a $\mathrm{S}(\mu_1)$. Para probar esto, notemos que si una cualquiera de estas afirmaciones no fuera cierta, entonces, en la construcción del polinomio q en el Lema 2.1.3, pudiéramos no tener en cuenta los ceros correspondientes, lo cual nos da algunos grados de libertad extra para usar la ortogonalidad y arribar a una contradicción como fue hecho allí. En la demostración del Teorema 2.4 queda claro también que los ceros de Q_n en $]a, b[$ son simples y se entrelazan con los ceros de Q'_n sobre ese conjunto.

La segunda observación es en relación con el papel clave que juega el Lema 2.1.1 en la demostración del Teorema 2.4. Su rol es garantizar que en la construcción de q en el Lema 2.1.3, no caigan ceros extras de q o q' en $]a, b[$ o $]c, d[$ respectivamente. El Lema 2.1.1 puede ser empleado para incluir productos de Sobolev más generales soportados sobre el eje real, siempre y cuando los soportes de las medidas aparezcan en un cierto orden. Para ser más precisos, siguiendo esencialmente las mismas ideas, podemos probar el resultado siguiente.

Consideremos el producto interno de Sobolev (2.1) soportado sobre el eje real, tal que para cada $j = 0, \cdots, N-1$, se cumple

$$\mathrm{Co}\left(\bigcup_{j=0}^{k} \mathrm{S}(\mu_j)\right) \cap \mathrm{S}(\mu_{k+1}) = \emptyset.$$

Entonces para todo $n \geq N$ los ceros de $Q_n^{(N)}$ son simples y están contenidos en el interior de $\mathrm{Co}\left(\bigcup_{j=0}^{N} \mathrm{S}(\mu_j)\right)$. Los ceros de $Q_n^{(j)}, j = 0, \cdots, N-1$ se encuentran en el disco con centro en z_0 y radio $3^{N-j}r$, donde z_0 es el centro del intervalo $\mathrm{Co}(\bigcup_{j=0}^{N} \mathrm{S}(\mu_j))$ y r es igual a la mitad de la longitud de ese intervalo.

Para $N = 1$ esta afirmación es más débil que la contenida en el Teorema 2.4 en relación con la localización de los ceros de los Q_n, debido a que en las condiciones presentes permitimos que $\mathrm{S}(\mu_1)$ tenga puntos a ambos lados de $\mathrm{Co}(\mathrm{S}(\mu_0))$.

2.2. Distribución asintótica regular de ceros

En relación con la asintótica de la raíz enésima de polinomios ortogonales de Sobolev, el primer resultado de carácter general apareció en [16] para el caso en que en (2.1) las medidas μ_j están soportadas sobre el eje real y $N = 1$. En [24] detalles menores permitieron a los autores extender ese resultado al caso de N arbitrario. Ahora, presentamos el caso de polinomios ortogonales de Sobolev en el plano complejo.

Las definiciones y resultados que se emplearan en esta sección aparecen en las secciones 1.1 y 1.3 del Capítulo 1.

Denotemos por Ω a la componente conexa no acotada del complemento en $\overline{\mathbb{C}}$ del soporte Δ del producto interno de Sobolev (2.1), y por $g_\Omega(z; \infty)$ a la función de Green de la región Ω con singularidad en el infinito.

Cuando Δ es regular respecto al problema de Dirichlet, la función de Green es continua hasta la frontera y la extendemos continuamente a todo $\mathbb{C}$ asignándole el valor cero sobre el complemento de Ω. Denotaremos por ω_Δ a la medida de equilibrio de Δ.

Supongamos que existe $l \in \{0, \cdots, N\}$ tal que $\cup_{j=0}^{l} \mathrm{S}(\mu_j) = \Delta$, donde $\mathrm{S}(\mu_j)$ es regular respecto al problema de Dirichlet y $\mu_j \in \mathbf{Reg}$ para $j = 0, \cdots, l$. Bajo estas condiciones, diremos que el producto interno de Sobolev (2.1) es *l-regular*. Si el producto interno es secuencialmente dominado, entonces $\mathrm{S}(\mu_0) = \Delta$; por consiguiente, si $\mathrm{S}(\mu_0)$ y μ_0 son regulares, el correspondiente producto interno es 0-regular.

El siguiente resultado está inspirado en el Teorema 1 y el Corolario 3 de [16].

Bajo la condición de l-regularidad demostramos que la sucesión de las derivadas de orden mayor o igual a l de los polinomios ortogonales mónicos de Sobolev tiene comportamiento asintótico minimal respecto a la norma uniforme sobre el soporte del producto interno. De esto se deriva la distribución asintótica regular de ceros y la asintótica de la raíz enésima de tales sucesiones. Si adicionalmente, el producto de Sobolev es secuencialmente dominado y 0-regular, se obtiene la distribución asintótica regular de ceros y la asintótica de la raíz enésima de la propia sucesión de polinomios ortogonales mónicos de Sobolev.

Teorema 2.5 *Supongamos que el producto interno de Sobolev (2.1) es l-regular. Entonces*

$$\limsup_{n\to\infty} \|Q_n^{(k)}\|_{\mathrm{S}(\mu_j)}^{1/n} \leq \mathrm{C}(\Delta) \tag{2.13}$$

para cada $j = 0, \cdots, l$ fijo, y para todo $k \geq j$, y

$$\lim_{n\to\infty} \|Q_n^{(k)}\|_{\Delta}^{1/n} = \mathrm{C}(\Delta) \tag{2.14}$$

para todo $k \geq l$

Además, si el interior de Δ es vacío y su complemento conexo, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \nu(Q_n^{(k)}) = \omega_{\Delta} \tag{2.15}$$

*para todo $k \geq l$ en la topología *-débil de medidas.*

El ejemplo siguiente ilustra que (2.15) no es una consecuencia directa de (2.14). Sea $\mu_j,\ j = 0, \cdots, N$, la medida de Lebesgue sobre la circunferencia unidad. Este producto interno de Sobolev es 0-regular y por lo tanto se cumple (2.14) para todo $k \geq 0$. Obviamente $\{z^n\}$ es la correspondiente sucesión de polinomios ortogonales mónicos de Sobolev, cuya sucesión de medidas contadoras de ceros normalizadas converge en la topología *-débil a la medida de Dirac con masa uno en cero. Bajo la condición (2.14), se cumple (2.15) si se conoce que $\lim_{n\to\infty} \nu(Q_n^{(j)})(A) = 0$ para todo conjunto compacto A contenido en $\{z : |z| < 1\}$ (ver Teorema 1.11). Pero encontrar condiciones generales sobre las medidas involucradas en el producto interno que garanticen esta propiedad es, en general, aún en el caso de la ortogonalidad usual, un problema abierto.

Demostración del Teorema 2.5. Comenzaremos probando que

$$\limsup_{n\to\infty} \|Q_n\|_S^{1/n} \leq \mathrm{C}(\Delta). \tag{2.16}$$

Como cada uno de los conjuntos $\mathrm{S}(\mu_j),\ j = 0, \cdots, l$, es regular, entonces Δ también lo es. Sea T_n el polinomio mónico de Chebyshev de grado n para el soporte Δ. Para simplificar la notación, escribiremos $\|\cdot\|_{L^2(\mu_j)} = \|\cdot\|_j$. Conocemos que $\lim_{n\to\infty} \|T_n\|_{\Delta}^{1/n} = \mathrm{C}(\Delta)$ (ver (1.7)). Entonces, como Δ es un conjunto compacto regular, por el Lema 1.3.1 (aplicado a T_n), para todo $k \in \mathbb{Z}_+$ se cumple

$$\limsup_{n\to\infty} \|T_n^{(k)}\|_{\Delta}^{1/n} \leq \mathrm{C}(\Delta).$$

Por la propiedad de minimalidad de la norma de Sobolev de los polinomios Q_n, tenemos

$$\|Q_n\|_S^2 \leq \|T_n\|_S^2 = \sum_{j=0}^{N} \|T_n^{(j)}\|_j^2 \leq \sum_{j=0}^{N} \mu_j(\mathrm{S}(\mu_j))\|T_n^{(j)}\|_{\Delta}^2.$$

De los dos últimos estimados deducimos (2.16). Por la regularidad de las medidas μ_j (ver (1.8)), sabemos que para cada $j = 0, \cdots, l$ se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\|Q_n^{(j)}\|_{\mathrm{S}(\mu_j)}}{\|Q_n^{(j)}\|_j} \right)^{1/n} = 1 \tag{2.17}$$

Como

$$\|Q_n^{(j)}\|_j \leq \|Q_n\|_S^2,$$

(2.16) y (2.17) implican que

$$\limsup_{n\to\infty} \|Q_n^{(j)}\|_{\mathrm{S}(\mu_j)}^{1/n} \leq \mathrm{C}(\Delta). \tag{2.18}$$

Ahora, en virtud del Lema 1.3.1, la relación (2.13) sigue de (2.18).

Si $k \geq l$, entonces tiene lugar (2.13) para cada $j = 0, \ldots, l$. Como

$$\|Q_n^{(k)}\|_\Delta = \max_{j=0,\ldots,l} \|Q_n^{(k)}\|_{\mathrm{S}(\mu_j)},$$

aplicando (2.13), obtenemos

$$\limsup_{n\to\infty} \|Q_n^{(k)}\|_\Delta^{1/n} \leq \mathrm{C}(\Delta).$$

Por otro lado

$$\liminf_{n\to\infty} \|Q_n^{(k)}\|_\Delta^{1/n} \geq \mathrm{C}(\Delta)$$

es siempre cierta para cualquier sucesión $\{Q_n\}$ de polinomios mónicos. Por lo tanto, se cumple (2.14).

Si el conjunto compacto Δ tiene interior vacío y complemento conexo, es bien conocido (ver teorema 1.11) que (2.14) implica (2.15). □

Observemos que en el Teorema 2.5, algunas de las medidas $\mu_j,\ j = 2, \cdots, N-1$, pueden ser, eventualmente, la medida nula. En este caso, μ_j y $\mathrm{S}(\mu_j) = \emptyset$ son considerados regulares y $\|Q_n^{(j)}\|_\emptyset = 0$. Con este convenio, el Teorema 2.5 permanece vigente.

Los llamados productos internos de Sobolev discretos han atraído particular atención en años recientes. Ellos son de la forma

$$\langle f, g\rangle_S = \int f(x)\overline{g(x)}\, d\mu_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{N_i} A_{i,j} f^{(j)}(c_i)\overline{g^{(j)}(c_i)}, \tag{2.19}$$

donde $A_{i,j} \geq 0,\ A_{i,N_i} > 0,\ c_i \in \mathbb{C}$. Si alguno de los puntos c_i se encuentra en el complemento del soporte $\mathrm{S}(\mu_0)$ de μ_0, el producto interno de Sobolev correspondiente no puede ser l-regular. No obstante, una modificación simple de la demostración del Teorema 2.5 permite considerar este caso. Aquí sólo plantearemos el resultado correspondiente. Para los detalles, ver [24].

Teorema 2.6 *Sea el producto interno de Sobolev discreto (2.19), tal que* $\mathrm{S}(\mu_0)$ *es regular, y* $\mu_0 \in \mathbf{Reg}$. *Entonces se cumple (2.14) para todo* $j \geq 0$, *con* $\Delta = \mathrm{S}(\mu_0)$, *y también se cumple (2.15) bajo la suposición adicional de que* $\mathrm{S}(\mu_0)$ *tenga interior vacío y complemento conexo.*

El teorema siguiente es una consecuencia inmediata de los teoremas 2.1 y 2.5.

Teorema 2.7 *Supongamos que existe una constante positiva* C, *tal que*

$$\|M(q)\|_S \leq C\|q\|_S, \ \ q \in \mathcal{P},$$

y que el producto interno de Sobolev es l*-regular. Entonces, para todo* $k \geq l$ *se cumple*

$$\limsup_{n\to\infty} |Q_n^{(k)}(z)|^{1/n} \leq \mathrm{C}(\Delta) e^{g_\Omega(z;\infty)}, \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{2.20}$$

Además,

$$|Q_n^{(k)}(z)|^{1/n} \rightrightarrows \mathrm{C}(\Delta) e^{g_\Omega(z;\infty)} \quad en\ \{z : |z| > C\} \cap \Omega. \tag{2.21}$$

Finalmente, si el conjunto Δ *tiene interior vacío y su complemento es conexo, tenemos igualdad en (2.20) cuasi dondequiera en* $\mathbb{C}$, $\mathrm{S}(\omega_\Delta) \subset \{z : |z| \leq C\}$, *y*

$$\frac{Q_n^{(k+1)}(z)}{nQ_n^{(k)}(z)} \rightrightarrows \int \frac{d\omega_\Delta(x)}{z-x} \quad en\ \{z : |z| > C\}. \tag{2.22}$$

Demostración. Fijemos $k \in \mathbb{Z}_+$. Sea

$$v_n(z) = \frac{1}{n} \log \frac{|Q_n^{(k)}(z)|}{\|Q_n^{(k)}\|_\Delta} - g_\Omega(z;\infty).$$

Mostremos que

$$v_n(z) \leq 0, \qquad z \in \overline{\mathbb{C}}. \tag{2.23}$$

Esta función es subarmónica en Ω y sobre la frontera de Ω es menor o igual que cero. Por el principio del máximo para funciones subarmónicas, ella es menor o igual que cero sobre todo Ω. Sobre el complemento de Ω también tenemos que $v_n(z) \leq 0$ debido a que, por definición (y la regularidad de Δ), la función de Green es idénticamente nula sobre este conjunto; y el otro término que aparece en la definición de v_n es, obviamente, a lo sumo cero como consecuencia del principio del máximo para funciones analíticas. Estas observaciones implican (2.20) tomando límite superior en (2.23) y haciendo uso de (2.14). Notemos que para obtener esta desigualdad, no hicimos uso de la acotación del operador de multiplicación sobre $\mathcal{P}$.

Según el Teorema 2.1, para todo $n \in \mathbb{Z}_+$, los ceros de los polinomios ortogonales de Sobolev están contenidos en $\{z : |z| \leq C\}$. Es bien conocido que los ceros de la derivada de un polinomio se encuentran en la envoltura convexa del conjunto de ceros del propio polinomio. Por lo tanto, los ceros de $Q_n^{(k)}$, para todo $n \in \mathbb{Z}_+$, se encuentran en $\{z : |z| \leq C\}$. A partir de esto, tenemos que $\{v_n\}$ constituye una familia de funciones armónicas uniformemente acotada sobre cada subconjunto compacto de $\{z : |z| > C\} \cap \Omega$ (incluyendo a infinito). Tomemos una sucesión de índices Λ tal que $\{v_n\}_{n\in\Lambda}$ converge uniformemente sobre cada subconjunto compacto de $\{z : |z| > C\} \cap \Omega$. Sea v_Λ su límite. Obviamente, v_Λ es armónica y menor o igual que cero en $\{z : |z| > C\} \cap \Omega$, y por (2.14), $v_\Lambda(\infty) = 0$. Por lo tanto, $v_\Lambda \equiv 0$ en $\{z : |z| > C\} \cap \Omega$. Como esto es cierto para toda subsucesión convergente de $\{v_n\}$, tenemos que la propia sucesión converge uniformemente a cero sobre cada subconjunto compacto de $\{z : |z| > C\} \cap \Omega$. Esto es equivalente a (2.21).

Si adicionalmente, el interior de Δ es vacío y su complemento es conexo, podemos usar (2.15). Las medidas $\nu_{n,k} = \nu(Q_n^{(k)}), n \in \mathbb{Z}_+$, y ω_Δ tienen sus soportes contenidos en un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$. Empleando esto y (2.15), del Teorema 1.8 obtenemos

$$\liminf_{n\to\infty} \int \log \frac{1}{|z-x|}\, d\nu_{n,k}(x) = \int \log \frac{1}{|z-x|}\, d\omega_\Delta(x)$$

cuasi dondequiera en $\mathbb{C}$. Esto es equivalente a tener igualdad en (2.20) cuasi dondequiera, debido a que (ver (1.8))

$$g_\Omega(z;\infty) = \log \frac{1}{\mathrm{C}(\Delta)} - \int \log \frac{1}{|z-x|}\, d\omega_\Delta(x) \, .$$

Sean $x_{n,i}^k,\ i = 1, \cdots, n-k,$ los $n-k$ ceros de $Q_n^{(k)}$. Como se mencionó anteriormente, todos estos ceros están contenidos en $\{z : |z| \leq C\}$. Por (2.15), cada punto de $\mathrm{S}(\omega_\Delta)$ debe ser un punto límite de ceros de $\{Q_n^{(k)}\}$; por lo tanto, $\mathrm{S}(\omega_\Delta) \subset \{z : |z| \leq C\}$. Descomponiendo en fracciones simples y por la definición de $\nu_{n,k}$, obtenemos

$$\frac{Q_n^{(k+1)}(z)}{nQ_n^{(k)}(z)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-k} \frac{1}{z - x_{n,i}^k} = \frac{n-k}{n} \int \frac{d\nu_{n,k}(x)}{z-x}. \tag{2.24}$$

Por lo tanto, para cada $k \in \mathbb{Z}_+$ fijo, la familia de funciones

$$\left\{ \frac{Q_n^{(k+1)}(z)}{nQ_n^{(k)}(z)} \right\} \ , \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{2.25}$$

está uniformemente acotada sobre cada subconjunto compacto de $\{z : |z| > C\}$.

Por otro lado, todas las medidas $\nu_{n,k},\ n \in \mathbb{Z}_+$, están soportadas en $\{z : |z| \leq C\}$ y para z fijo, con $|z| > C$, la función $(z-x)^{-1}$ es continua respecto a x sobre $\{x : |x| \leq C\}$. Por consiguiente, aplicando (2.15) y (2.24), encontramos que cualquier subsucesión de (2.25), que converge uniformemente sobre cada subconjunto compacto de $\{z : |z| > C\}$, converge puntualmente a $\int (z-x)^{-1}\, d\omega_\Delta(x)$. Así, la propia sucesión converge uniformemente sobre cada subconjunto compacto de $\{z : |z| > C\}$ a esta función, como planteamos en (2.22). □

Capítulo 3:

ASINTÓTICA FUERTE PARA POLINOMIOS ORTOGONALES DE SOBOLEV

Capítulo 3

ASINTÓTICA FUERTE PARA POLINOMIOS ORTOGONALES DE SOBOLEV

Sea Γ un arco o curva cerrada de Jordan rectificable de longitud l en el plano complejo. Asumiremos que la parametrización de Γ con respecto a la longitud de arco pertenece a la clase C^{2+}, la subclase de funciones de C^2 cuya segunda derivada satisface una condición de Lipschitz.
Por Ω y $\Phi(z)$ denotaremos, respectivamente, a la componente conexa de $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ que contiene a infinito, y a la transformación conforme de Ω sobre el exterior de la circunferencia con centro en el origen y radio 1.

Entre los primeros resultados de carácter general sobre comportamiento asintótico fuerte (en Ω) para polinomios ortogonales de Sobolev están los obtenidos en [31] para el caso de productos internos con solo dos medidas

$$\langle p, q\rangle_S = \int_\Gamma p(\xi)\overline{q(\xi)}d\rho_0(\xi)|d\xi| + \int_\Gamma p'(\xi)\overline{q'(\xi)}d\rho_1(\xi)|d\xi|, \tag{3.1}$$

donde $\rho_i \in S(\Gamma)$, $i = 0, 1$ y $|d\xi|$ es la medida lineal de Lebesgue sobre Γ.

Posteriormente, en [32] estos resultados se extienden al caso de productos de Sobolev con N medidas soportadas todas sobre un mismo intervalo del eje real.

En [5] los autores estudian el comportamiento asintótico de la sucesión de polinomios ortogonales con respecto al producto de Sobolev discreto

$$\begin{aligned} \langle p, q\rangle_N &= \int_\Gamma p(\xi)\,\overline{q(\xi)}\rho_N(\xi)|d\xi| + p(Z)Aq(Z)^*, \qquad (3.2)\\ p(Z) &= \left(p(z_1), \cdots, p^{(l_1)}(z_1), \cdots, p(z_m), \cdots, p^{(l_m)}(z_m)\right), \end{aligned}$$

donde $\rho_N \in S(\Gamma)$, $z_i \in \Omega$, $i = 1, \cdots, m$, $p(Z)^*$ es el vector transpuesto conjugado de $p(Z)$, y A es una matriz hermítica definida positiva de orden $M = m + \sum_{j=1}^m l_j$.

Sea $\{\mu_k\}_{k=0}^{N-1}$ un conjunto de N medidas positivas finitas de Borel soportadas sobre Γ. Entonces (3.2) es un caso particular del producto interno de Sobolev

$$\langle p, q\rangle_S = \sum_{k=0}^{N-1} \langle p, q\rangle_{L^2(\mu_k)} + \langle p, q\rangle_N. \tag{3.3}$$

Para cada $i = 1, \cdots, m$, sean c_i, d_i tales que

$$l_i + 1 = c_i(N+1) + d_i.$$

Si $i_0 \in \{1, \cdots, m\}$ es tal que $l_{i_0} \geq N$, entonces $c_{i_0} \geq 1$ y para todo $k = 0, \cdots, N-1$, tenemos que $l_{i_0} - d_{i_0} - k = c_{i_0}(N+1) - 1 - k \geq 1$. Denotemos por I al conjunto de aquellos subíndices i tales que $l_i \geq N$. En el caso en que $I \neq \emptyset$, además del producto (3.3), vamos a considerar también todos los productos internos de Sobolev que se obtienen de este último mediante la adición de una parte discreta en al menos uno de sus N primeros términos. Más exactamente, si $I \neq \emptyset$, vamos a considerar todos aquellos productos de la forma

$$\langle p, q\rangle_S = \sum_{k=0}^{N-1} \langle p^{(k)}, q^{(k)}\rangle_k + \langle p^{(N)}, q^{(N)}\rangle_N, \tag{3.4}$$

donde por $\langle \cdot, \cdot\rangle_k,\ k = 0, \cdots, N-1$, denotaremos en este capítulo al producto usual en $L^2(\mu_k)$, o bien al producto

$$\begin{aligned} \langle p, q\rangle_k &= \int_\Gamma p(\xi)\,\overline{q(\xi)} d\mu_k(\xi) + p(Z_k)A_k q(Z_k)^*, \qquad (3.5) \\ p(Z_k) &= \left(p(z_{i_1}), \cdots, p^{(\nu_{i_1})}(z_{i_1}), \cdots, p(z_{i_{t_k}}), \cdots, p^{(\nu_{i_{t_k}})}(z_{i_{t_k}})\right), \end{aligned}$$

donde $i_j \in I,\ j = 1, \cdots, t_k,\ 0 \leq \nu_{i_j} \leq l_{i_j} - d_{i_j} - k$, y A_k es una matriz hermítica definida positiva de orden $M_k = t_k + \sum_{j=1}^{t_k} \nu_{i_j}$. En cualquiera de los dos casos, denotaremos por $\|\cdot\|_k$ a la norma inducida por $\langle \cdot, \cdot\rangle_k$. Esta notación la haremos extensiva al caso en que $k = N$.
La norma inducida por el producto interno (3.4) la denotaremos por $\|\cdot\|_S$.

Sea Q_n el n-ésimo polinomio ortogonal mónico de Sobolev respecto al producto interno (3.4).

Empleando las ideas de [31], [20] y [21], en este capítulo obtenemos el comportamiento asintótico fuerte en Ω de los polinomios Q_n y de todas sus derivadas hasta el orden N inclusive, extendiendo de esta manera los resultados de [31], [32] y [5].

3.1. Asintótica de las normas de Sobolev

Recordemos (ver la sección 1.4) que por $S(\Gamma)$ y $\mathcal{F}^*$ denotamos, respectivamente, la clase de todas las medidas que satisfacen la condición de *Szegö* sobre Γ, y la función extremal correspondiente a la medida μ_N que cumple

$$(\mathcal{F}^*)^{(j)}(z_i) = 0,\ j = 0, \cdots, l_i,\ i = 1, \cdots, m. \tag{3.6}$$

Por L_n denotamos el n-ésimo polinomio ortogonal mónico respecto al producto de Sobolev discreto (3.2) y $\tau_n = \|L_n\|_N^2$.

Asociada a la función extremal $\mathcal{F}^*$ y la transformación conforme Φ, consideremos la sucesión de funciones $\{H_n\}$, definidas casi dondequiera sobre Γ por :

$$H_n(\xi) = \begin{cases} \mathcal{F}^*(\xi)\Phi^n(\xi) & \text{, si } \Gamma \text{ es una curva cerrada,} \\ \\ \mathcal{F}_+^*(\xi)\Phi_+^n(\xi) + \mathcal{F}_-^*(\xi)\Phi_-^n(\xi) & \text{, si } \Gamma \text{ es un arco.} \end{cases}$$

Sea

$$\kappa_n = \|Q_n\|_S^2 = \text{ínf}\,\{\|q\|_S^2 : q(z) = z^n + \cdots\}. \tag{3.7}$$

Nuestro primer resultado establece el comportamiento asintótico de las normas de Sobolev (3.7) cuando $n \to \infty$.

Teorema 3.1 *Si en (3.4), $\Gamma \in C^{2+}$ es un arco o curva cerrada de Jordan, $d\mu_N(\xi) = \rho_N(\xi)|d\xi|$, con $\rho_N \in S(\Gamma)$, $\{\mu_k\}_{k=0}^{N-1}$ es un conjunto arbitrario de medidas positivas finitas de Borel soportadas sobre Γ, y $\{z_1, \cdots, z_m\}$ es un conjunto fijo de puntos en Ω, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\kappa_n}{n^{2N}\tau_{n-N}} = 1. \tag{3.8}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\| H_{n-N} - \frac{(n-N)!}{n!} \frac{Q_n^{(N)}}{\mathrm{C}(\Gamma)^{n-N}} \right\|_{L^2(\rho_N)} = 0. \tag{3.9}$$

Comenzaremos estableciendo dos resultados previos que serán necesarios para la demostración de (3.8). Sea $\mathcal{P}^*$ la familia de polinomios mónicos en $\mathcal{P}$. Fijemos un punto $\xi_0 \in \Gamma$ y consideremos el operador $\Pi : \mathcal{P}^* \to \mathcal{P}^*$ que asocia a cada polinomio de $\mathcal{P}^*$ el polinomio mónico primitivo normalizado por la condición de anularse en $z = \xi_0$. Es decir, si $R(z) = z^n + \cdots$,

$$\Pi(R)(z) = (n+1)\int_{\xi_0}^{z} R(t)dt.$$

Definamos ahora $\Pi_0 = I$, $\quad \Pi_k = \Pi \circ \Pi_{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, donde I denota al operador identidad sobre $\mathcal{P}^*$. Si $R(z) = z^n + \cdots$, entonces *grad* $\Pi_k(R) = n + k$ y para todo $j \in \mathbb{Z}_+$ se cumple

$$\Pi_k^{(j)}(R)(z) = \frac{(n+k)!}{(n+k-j)!}\Pi_{k-j}(R)(z). \tag{3.10}$$

Denotemos por ω y W a los polinomios

$$\begin{aligned}\omega(z) &= \prod_{i=1}^{m}(z-z_i)^{l_i+1}, \quad grad\,\omega = m + \sum_{j=1}^{m} l_j = M,\\ W(z) &= |\omega(z)|^2.\end{aligned}$$

Sean ω_1 y ω_2 polinomios tales que

$$\omega(z) = \omega_1(z)\omega_2(z). \tag{3.11}$$

Lema 3.1.1 *Sea $d\mu(\xi) = \rho(\xi)|d\xi|$ una medida positiva finita de Borel y $P_n(z) = P_n(\rho W; z)$ el n-ésimo polinomio ortogonal mónico respecto a la medida $\rho W|d\xi|$. Si $1/\rho \in L^1(\Gamma)$, entonces para todo $k \in \mathbb{N}$, la sucesión de polinomios*

$$\alpha_{n,k}(z) = \frac{(n + grad\,\omega_2)!}{(n + grad\,\omega_2 + k)!}\frac{\Pi_k(\omega_2 P_n)(z)}{\sqrt{\lambda_n(\rho W)}}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.12}$$

está uniformemente acotada sobre Γ y tiende a cero para todo $\xi \in \Gamma$ cuando $n \to \infty$.

Demostración. Sea $\xi = \xi(s)$, $s \in [0, l]$, $\xi(0) = \xi(l) = \xi_0$, la parametrización de Γ respecto a la longitud de arco. Si $\widetilde{\xi} \in \Gamma$,

$$\alpha_{n,1}(\widetilde{\xi}) = \frac{1}{n - grad\,\omega_2 + 1}\frac{\Pi_1(\omega_2 P_n)(\widetilde{\xi})}{\sqrt{\lambda_n(\rho W)}} = \int_{\Lambda(\widetilde{\xi})} \omega_2(\xi)p_n(\xi)d\xi.$$

donde $\Lambda(\widetilde{\xi}) = \xi([0, s])$ denota el arco sobre Γ que une a ξ_0 con $\widetilde{\xi}$, recorrido según la orientación dada por esta parametrización. Si $1_{\Lambda(\widetilde{\xi})}$ es la función indicadora de $\Lambda(\widetilde{\xi})$, entonces

$$\begin{aligned}\alpha_{n,1}(\widetilde{\xi}) &= \int_{\Lambda(\widetilde{\xi})} \omega_2(\xi)p_n(\xi)d\xi = \int_0^s \omega_2(\xi(t))p_n(\xi(t))\xi'(t)dt\\ &= \int_{[0,l]} 1_{\Lambda(\widetilde{\xi})}(\xi(t))\frac{\xi'(t)p_n(\xi(t))W(\xi(t))\rho(\xi(t))}{|\omega_1(\xi(t))|^2\overline{\omega_2(\xi(t))}\rho(\xi(t))}dt\\ &= \overline{\int_\Gamma g(\widetilde{\xi};\xi)\overline{p_n(\xi)}W(\xi)\rho(\xi)|d\xi|}\\ &= \overline{\langle g(\widetilde{\xi};\cdot), p_n\rangle}_{L^2(\rho W)},\end{aligned}$$

donde

$$g(\widetilde{\xi};\xi) = 1_{\Lambda(\widetilde{\xi})}(\xi)\frac{\overline{\xi'(t)}}{|\omega_1(\xi)|^2\omega_2(\xi)\rho(\xi)}, \quad \xi \in \Gamma.$$

Como $1/\rho \in L^1(\Gamma)$, entonces para todo es $\widetilde{\xi} \in \Gamma$

$$\begin{aligned}\|g(\widetilde{\xi};\cdot)\|^2_{L^2(\rho W)} &= \int_\Gamma |g(\widetilde{\xi};\xi)|^2 W(\xi)\rho(\xi)|d\xi| \\ &= \int_\Gamma \frac{1}{|\omega_1(\xi)|^2\rho(\xi)}|d\xi| \leq \left\|\frac{1}{\omega_1}\right\|^2_\Gamma \left\|\frac{1}{\rho}\right\|_{L^1(\Gamma)},\end{aligned}$$

donde $\|\cdot\|_\Gamma$ denota la norma del supremo sobre Γ.
De lo anterior concluimos que $\alpha_{n,1}(\xi)$ es el conjugado del n-ésimo coeficiente de Fourier de $g(\xi;\cdot)$ respecto al sistema ortonormal $\{p_n\}$ en $L^2(\rho W)$ para todo $\xi \in \Gamma$. Luego, de la desigualdad de Bessel deducimos que

$$\begin{gathered}|\alpha_{n,1}(\xi)| \leq \|g(\xi;\cdot)\|_{L^2(W d\mu)} \leq \left\|\frac{1}{\omega_1}\right\|_\Gamma \left\|\frac{1}{\rho}\right\|^{1/2}_{L^1(\Gamma)}, \quad \forall\, \xi \in \Gamma, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \\ \lim_{n\to\infty} \alpha_{n,1}(\xi) = 0, \quad \xi \in \Gamma.\end{gathered} \tag{3.13}$$

Por la definición del operador $\Pi_k,\ k \in \mathbb{N}$, y (3.12) obtenemos

$$\alpha_{n,k+1}(z) = \int_{\xi_0}^{z} \alpha_{n,k}(x)dx, \quad n,k \in \mathbb{N},\ z \in \mathbb{C}. \tag{3.14}$$

Ahora, de (3.13), (3.14), el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue y simples argumentos de inducción, se concluye que $\lim_{n\to\infty} \alpha_{n,k}(\xi) = 0$, para todo $\xi \in \Gamma$ y $k \in \mathbb{N}$. $\square$

Lema 3.1.2 *Sea $P_n(z) = P_n(\rho_N W; z)$ el n-ésimo polinomio ortogonal mónico respecto a la medida $\rho_N W|d\xi|$ y supongamos que se verifican las hipótesis del teorema 3.1. Entonces*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\kappa_n}{n^{2N}\lambda_{n-N-M}(\rho_N W)} \leq 1. \tag{3.15}$$

Demostración. Por definición

$$\kappa_n = \|Q_n\|^2_S = \sum_{k=0}^{N} \|Q_n^{(k)}\|^2_k.$$

Si $\|\cdot\|_k = \|\cdot\|_{L^2(\mu_k)},\ k = 0,\cdots,N-1$, tomemos $\omega_1 \equiv 1,\ \omega_2 = \omega$ en (3.11). Si este no es el caso, es decir, si para al menos un k, la norma $\|\cdot\|_k$ es la inducida por el producto interno (3.5), tomemos

$$\omega_1(z) = \prod_{i=1}^{m}(z-z_i)^{(N+1)c_i}, \quad \omega_2(z) = \prod_{i=1}^{m}(z-z_i)^{d_i}.$$

Demostraremos (3.15) suponiendo que estamos en presencia de este segundo caso. El primero se prueba de manera similar.
En el caso que nos ocupa, $grad\ \omega_2 = M - (N+1)\sum_{i=1}^{m} c_i = M - \widehat{m}$, donde $\widehat{m} = (N+1)\sum_{i=1}^{m} c_i$.
Supongamos inicialmente que $1/\rho_N \in L^1(\Gamma)$. Por la propiedad extremal (3.7) de los polinomios Q_n se cumple

$$\kappa_n \leq \|\omega_1 \Pi_N(\omega_2 P_{n-N-M})\|_S^2$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \| \left(\omega_1 \Pi_N(\omega_2 P_{n-N-M})\right)^{(k)} \|_k^2. \tag{3.16}$$

Según la fórmula de Leibniz para la derivada de orden superior de un producto y (3.10) es

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{N-1} \| \left(\omega_1 \Pi_N(\omega_2 P_{n-N-M})\right)^{(k)} \|_k^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \left\| \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \omega_1^{(j)} \Pi_N^{(k-j)}(\omega_2 P_{n-N-M}) \right\|_k^2 \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j,r=0}^{k} \binom{k}{j}\binom{k}{r} \int_\Gamma \left[\omega_1^{(j)} \overline{\omega_1}^{(r)} \Pi_N^{(k-j)}(\omega_2 P_{n-N-M}) \overline{\Pi_N^{(k-r)}(\omega_2 P_{n-N-M})}\right] d\mu_k \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j,r=0}^{k} \binom{k}{j}\binom{k}{r} \int_\Gamma \left[\omega_1^{(j)} \overline{\omega_1}^{(r)} \frac{(n-\widehat{m})!}{(n-\widehat{m}-k+j)!} \Pi_{N-k+j}(\omega_2 P_{n-N-M})\right] \\
&\qquad \times \left[\frac{(n-\widehat{m})!}{(n-\widehat{m}-k+r)!} \overline{\Pi_{N-k+r}(\omega_2 P_{n-N-M})}\right] d\mu_k.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
&\| \left(\omega_1 \Pi_N(\omega_2 P_{n-N-M})\right)^{(N)} \|_N^2 \\
&= \sum_{\substack{j,r=0 \\ j \wedge r \neq 0}}^{N} \binom{N}{j}\binom{N}{r} \int_\Gamma \left[\omega_1^{(j)} \overline{\omega_1}^{(r)} \Pi_N^{(N-j)}(\omega_2 P_{n-N-M}) \overline{\Pi_N^{(N-r)}(\omega_2 P_{n-N-M})}\right] \rho_N(\xi)|d\xi| \\
&\quad + \int_\Gamma |\omega_1|^2 |\Pi_N^{(N)}(\omega_2 P_{n-N-M})|^2 \rho_N(\xi)|d\xi| \\
&= \sum_{\substack{j,r=0 \\ j \wedge r \neq 0}}^{N} \binom{N}{j}\binom{N}{r} \int_\Gamma \left[\omega_1^{(j)} \overline{\omega_1}^{(r)} \frac{(n-\widehat{m})!}{(n-N-\widehat{m}+j)!} \Pi_j(\omega_2 P_{n-N-M})\right] \\
&\quad \times \left[\frac{(n-\widehat{m})!}{(n-N-\widehat{m}+r)!} \overline{\Pi_r(\omega_2 P_{n-N-M})}\right] \rho_N(\xi)|d\xi|
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$+\left(\frac{(n-\widehat{m})!}{(n-N-\widehat{m})!}\right)^2 \lambda_{n-N-M}(\rho_N W).$$

Sustituyendo en (3.16) y dividiendo ambos miembros de dicha desigualdad por el último término de la suma en (3.18) (y empleando la notación introducida en el lema 3.1.1, ver (3.12)) se obtiene

$$\begin{aligned}
&\frac{\kappa_{2,n}}{\left(\frac{(n-\widehat{m})!}{(n-N-\widehat{m})!}\right)^2 \lambda_{n-N-M}(\rho_N W)} \\
&\leq 1+\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j,r=0}^{k}\binom{k}{j}\binom{k}{r}\int_\Gamma \left[\omega_1^{(j)}\overline{\omega_1}^{(r)}\frac{(n-N-\widehat{m})!}{(n-\widehat{m}-k+j)!}\frac{\Pi_{N-k+j}(\omega_2 P_{n-N-M})}{\sqrt{\lambda_{n-N-M}(\rho_N W)}}\right] \\
&\qquad\qquad \times\left[\frac{(n-N-\widehat{m})!}{(n-\widehat{m}-k+r)!}\frac{\overline{\Pi_{N-k+r}(\omega_2 P_{n-N-M})}}{\sqrt{\lambda_{n-N-M}(\rho_N W)}}\right]d\mu_k \\
&+\sum_{\substack{j,r=0\\ j\wedge r\neq 0}}^{N}\binom{N}{j}\binom{N}{r}\int_\Gamma\left[\omega_1^{(j)}\overline{\omega_1}^{(r)}\frac{(n-N-\widehat{m})!}{(n-N-\widehat{m}+j)!}\frac{\Pi_j(\omega_2 P_{n-N-M})}{\sqrt{\lambda_{n-N-M}(\rho_N W)}}\right] \qquad (3.19)\\
&\qquad\qquad \times\left[\frac{(n-N-\widehat{m})!}{(n-N-\widehat{m}+r)!}\frac{\overline{\Pi_r(\omega_2 P_{n-N-M})}}{\sqrt{\lambda_{n-N-M}(\rho_N W)}}\right]\rho_N(\xi)|d\xi| \\
&=1+\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j,r=0}^{k}\binom{k}{j}\binom{k}{r}\int_\Gamma \omega_1^{(j)}\overline{\omega_1}^{(r)}\alpha_{n-N-M,N-k+j}\,\overline{\alpha_{n-N-M,N-k+r}}d\mu_k \\
&+\sum_{\substack{j,r=0\\ j\wedge r\neq 0}}^{N}\binom{N}{j}\binom{N}{r}\int_\Gamma \omega_1^{(j)}\overline{\omega_1}^{(r)}\alpha_{n-N-M,j}\overline{\alpha_{n-N-M,r}}\rho_N(\xi)|d\xi|.
\end{aligned}$$

Del lema 3.1.1 y del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue deducimos de forma directa que para $0\leq k\leq N-1$ y $0\leq j,r\leq k$ se cumple

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Gamma \omega_1^{(j)}\overline{\omega_1}^{(r)}\alpha_{n-N-M,N-k+j}\,\overline{\alpha_{n-N-M,N-k+r}}d\mu_k=0,$$

y que para $0\leq j,r\leq N,\ j\neq 0, r\neq 0$

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Gamma \omega_1^{(j)}\overline{\omega_1}^{(r)}\alpha_{n-N-M,j}\overline{\alpha_{n-N-M,r}}\rho_N(\xi)|d\xi|=0.$$

Cuando $k=N,\ 0\leq j,r\leq N$, y por ejemplo, $j=0$ y $r\neq 0$ también deducimos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Gamma \omega_1\overline{\omega_1}^{(r)}\alpha_{n-N-M,0}\overline{\alpha_{n-N-M,r}}\rho_N(\xi)|d\xi|=0$$

En efecto, notemos que en este último caso

$$\int_{\Gamma} \omega_1 \overline{\omega_1}^{(r)} \alpha_{n-N-M,0} \overline{\alpha_{n-N-M,r}} \rho_N(\xi)|d\xi| = \int_{\Gamma} \omega_1 \overline{\omega_1}^{(r)} \omega_2 p_{n-N-M} \rho_N(\xi)|d\xi|,$$

donde p_{n-N-M} es el polinomio ortonormal de grado $n-N-M$ respecto a la medida $\rho_N W|d\xi|$. Aplicando la desigualdad de *Hölder* en la integral anterior obtenemos

$$\left| \int_{\Gamma} \omega_1 \overline{\omega_1}^{(r)} \alpha_{n-N-M,0} \overline{\alpha_{n-N-M,r}} \rho_N(\xi)|d\xi| \right| \leq \|\omega_1^{(r)}\|_{\Gamma} \, \|\alpha_{n-N-M,r}\|_{L^2(\rho_N)}.$$

Ahora, de esta desigualdad, el lema 3.1.1 y el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, deducimos la igualdad deseada.
Por consiguiente, cuando $1/\rho \in L^1(\Gamma)$, (3.15) sigue de (3.19).

Supongamos ahora que el peso $\rho_N \in S(\Gamma)$ es arbitrario. Tomemos una constante arbitraria $\delta > 0$ (que será fijada posteriormente) y definamos $\widetilde{\rho}_N(\xi) = \rho_N(\xi) + \delta$. Sea $\widetilde{P}_n = \widetilde{P}_n(\widetilde{\rho}_N W; \cdot)$ el n-ésimo polinomio ortogonal mónico respecto a la medida $d\widetilde{\mu}(\xi) = \widetilde{\rho}_N(\xi) W(\xi)|d\xi|$, y sea $\widetilde{\alpha}_{n,k}$ la sucesión definida en (3.12) correspondiente a la medida $\widetilde{\mu}$. Como $\widetilde{\rho}_N \geq \rho_N$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{\kappa_n}{\left(\frac{(n-\widehat{m})!}{(n-N-\widehat{m})!}\right)^2 \lambda_{n-N-M}(\rho_N W)} &\leq \frac{\lambda_{n-N-M}(\widetilde{\rho}_N W)}{\lambda_{n-N-M}((\rho_N W))} \times \\
&\left[1 + \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j,r=0}^{k} \binom{k}{j} \binom{k}{r} \int_{\Gamma} \omega_1^{(j)} \overline{\omega_1}^{(r)} \widetilde{\alpha}_{n-N-M,N-k+j} \, \overline{\widetilde{\alpha}_{n-N-M,N-k+r}} d\mu_k \right. \\
&\left. + \sum_{\substack{j,r=0 \\ j \wedge r \neq 0}}^{N} \binom{N}{j} \binom{N}{r} \int_{\Gamma} \omega_1^{(j)} \overline{\omega_1}^{(r)} \widetilde{\alpha}_{n-N-M,j} \overline{\widetilde{\alpha}_{n-N-M,r}} \rho_N(\xi)|d\xi| \right].
\end{aligned}$$

Pero $1/\widetilde{\rho}_N \in L^1(\Gamma)$, luego, del lema 3.1.1 y la desigualdad anterior deducimos que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\kappa_n}{\left(\frac{(n-\widehat{m})!}{(n-N-\widehat{m})!}\right)^2 \lambda_{n-N-M}(\rho_N W)} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_{n-N-M}(\widetilde{\rho}_N W)}{\lambda_{n-N-M}(\rho_N W)}. \tag{3.20}$$

Como $\rho_N \in S(\Gamma)$, entonces $\rho_N W$, $\widetilde{\rho}_N W \in S(\Gamma)$. Luego, de (1.19), (1.16) y (1.12) se obtiene

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_{n-N-M}(\widetilde{\rho}_N W)}{\lambda_{n-N-M}(\rho_N W)} &= \frac{\nu(\widetilde{\rho}_N W)}{\nu(\rho_N W)} \\
&= \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} [\ln(\rho_N + \delta) - \ln \rho_N](\xi) \frac{\partial g(\xi;\infty)}{\partial \eta_\xi} |d\xi| \right\}. \qquad (3.21)
\end{aligned}$$

Sólo resta usar la continuidad de la constante extremal $\rho_N \in S(\Gamma)$, en la métrica dada por

$$dist(\vartheta, \sigma) = \frac{1}{\pi} \int_\Gamma |\ln \vartheta - \ln \sigma|(\xi) \frac{\partial g(\xi; \infty)}{\partial \eta_\xi} |d\xi|,$$

para $\vartheta, \sigma \in S(\Gamma)$. En efecto, por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue,

$$dist(\widetilde{\rho}_N, \rho_N) \to 0, \quad \delta \to 0.$$

Luego, fijado $\varepsilon > 0$ arbitrario, podemos tomar $\delta > 0$ en (3.21) de forma tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_{n-N-M}(\widetilde{\rho}_N W)}{\lambda_{n-N-M}(\rho_N W)} \leq 1 + \varepsilon. \tag{3.22}$$

Así deducimos (3.15) a partir de (3.20), (3.22), y la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$. $\square$

Demostración de (3.8) en el Teorema 3.1. Por la propiedad de extremalidad de los polinomios L_n, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > N$, se cumple

$$\left(\frac{(n-N)!}{n!}\right)^2 \|Q_n^{(N)}\|_N^2 \geq \|L_{n-N}\|_N^2 = \tau_{n-N}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \kappa_n = \|Q_n\|_s^2 &= \sum_{k=0}^{N-1} \|Q_n^{(k)}\|_k^2 + \|Q_n^{(N)}\|_N^2 \\ &\geq \|Q_n^{(N)}\|_N^2 \geq \left(\frac{n!}{(n-N)!}\right)^2 \tau_{n-N}. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\frac{\kappa_n}{\left(\frac{n!}{(n-N)!}\right)^2 \tau_{n-N}} \geq 1, \qquad n > N. \tag{3.23}$$

De aquí concluimos que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\kappa_n}{n^{2N} \tau_{n-N}} \geq 1. \tag{3.24}$$

Por otro lado,

$$\frac{\kappa_n}{n^{2N}\tau_{n-N}} = \frac{\kappa_n}{n^{2N}\lambda_{n-N-M}(\rho_N W)} \cdot \frac{\lambda_{n-N-M}(\rho_N W)}{\tau_{n-N}}. \tag{3.25}$$

Entonces (3.15) implica que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\kappa_n}{n^{2N}\tau_{n-N}} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\lambda_{n-N-M}(\rho_N W)}{\tau_{n-N}}. \tag{3.26}$$

Pero

$$\frac{\lambda_{n-N-M}(\rho_N W)}{\tau_{n-N}} = \frac{\lambda_{n-N-M}(\rho_N W)}{\lambda_{n-N}(\rho_N)} \cdot \frac{\lambda_{n-N}(\rho_N)}{\tau_{n-N}}\,, \tag{3.27}$$

y según (1.19) y (1.16) se cumple

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_{n-N-M}(\rho_N W)}{\lambda_{n-N}(\rho_N)} = \frac{D(\rho_N W;\infty)}{D(\rho_N;\infty)} \frac{1}{\mathrm{C}(\Gamma)^{2M}}\,. \tag{3.28}$$

De (1.12) se deduce que

$$\frac{D(\rho_N W;\infty)}{D(\rho_N;\infty)} = \mathrm{C}(\Gamma)^{2M} \prod_{i=1}^{m} |\Phi(z_i)|^{2(l_i+1)}\,, \tag{3.29}$$

De (1.25) y de (3.26) a (3.29) concluimos que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\kappa_n}{n^{2N}\tau_{n-N}} \leq 1. \tag{3.30}$$

Ahora, (3.8) se deduce de (3.24) y (3.30). □

El lema siguiente se utilizará en la demostración de (3.9) en el teorema 3.1.

Lema 3.1.3 *Supongamos que se verifican las hipótesis del teorema 3.1, y sea*

$$\Psi_{n-N}(z) = \frac{(n-N)!}{n!} \frac{Q_n^{(N)}}{[\mathrm{C}(\Gamma)\Phi]^{n-N}}(z), \quad n \in \mathbb{N},\ n > N. \tag{3.31}$$

Entonces $\{\Psi_{n-N}\}$ *es normal en* Ω *y se cumple*

$$\lim_{n\to\infty} \Psi_{n-N}^{(j)}(z_i) = 0, \quad j = 0,\cdots,l_i,\ i = 1,\cdots,m. \tag{3.32}$$

Demostración.

$$\kappa_n = \|Q_n\|_S^2 = \sum_{k=0}^{N} \|Q_n^{(k)}\|_k^2.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\left(\frac{(n-N)!}{n!}\right)^2 \frac{\kappa_n}{\mathrm{C}(\Gamma)^{2(n-N)}} &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{(n-N)!}{n!}\right)^2 \frac{\|Q_n^{(k)}\|_k^2}{\mathrm{C}(\Gamma)^{2(n-N)}} \\ &+ \left\|\frac{(n-N)!}{n!}\frac{Q_n^{(N)}}{\mathrm{C}(\Gamma)^{n-N}}\right\|_{L^2(\rho_N)}^2 \\ &+ \left(\frac{(n-N)!}{n!}\right)^2 \frac{1}{\mathrm{C}(\Gamma)^{2(n-N)}} Q_n^{(N)}(Z) A Q_n^{(N)}(Z)^*.\end{aligned} \tag{3.33}$$

De (1.26) y (3.8) deducimos que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n-N)!}{n!}\right)^2\frac{\kappa_n}{\mathrm{C}(\Gamma)^{2(n-N)}}=\nu^*(\rho_N). \tag{3.34}$$

De las dos últimas igualdades obtenemos que

$$\limsup_{n\to\infty}\|\Psi_{n-N}\|^2_{H^2(\Omega,\rho_N)}\leq 2\nu^*(\rho_N).$$

Es decir, la sucesión $\{\Psi_{n-N}\}$ está acotada en $H^2(\Omega,\rho_N)$. De acuerdo con (1.28), $\{\Psi_{n-N}\}$ es normal en Ω.
Pasemos a ver la validez de (3.32). De (3.33) y (3.34) también deducimos que la sucesión

$$\left\{\left(\frac{(n-N)!}{n!}\right)^2\frac{1}{\mathrm{C}(\Gamma)^{2(n-N)}}Q_n^{(N)}(Z)AQ_n^{(N)}(Z)^*\right\}_{n\in\mathbb{N}},$$

está acotada, es decir, existe $\mathcal{K}>0$ tal que

$$\left[\frac{(n-N)!}{n!}\frac{Q_n^{(N)}(Z)}{\mathrm{C}(\Gamma)^{n-N}}\right]A\left[\frac{(n-N)!}{n!}\frac{Q_n^{(N)}(Z)^*}{\mathrm{C}(\Gamma)^{n-N}}\right]\leq\mathcal{K},\qquad \forall\, n\in\mathbb{N}. \tag{3.35}$$

Sea $A=B^*\Theta B$, B unitaria, $\Theta=diag[\lambda_1,\cdots,\lambda_M]$ diagonal, la descomposición espectral de A. Si b_i denota la i-ésima fila de la matriz B, entonces

$$\begin{aligned}&\left[\frac{(n-N)!}{n!}\frac{Q_n^{(N)}(Z)}{\mathrm{C}(\Gamma)^{n-N}}\right]A\left[\frac{(n-N)!}{n!}\frac{Q_n^{(N)}(Z)^*}{\mathrm{C}(\Gamma)^{n-N}}\right]\\&=\left[B\frac{(n-N)!}{n!}\frac{Q_n^{(N)}(Z)^*}{\mathrm{C}(\Gamma)^{n-N}}\right]^*\Theta\left[B\frac{(n-N)!}{n!}\frac{Q_n^{(N)}(Z)^*}{\mathrm{C}(\Gamma)^{n-N}}\right]\\&=\sum_{i=1}^M\lambda_i\left|b_i\frac{(n-N)!}{n!}\frac{Q_n^{(N)}(Z)^*}{\mathrm{C}(\Gamma)^{n-N}}\right|^2.\end{aligned} \tag{3.36}$$

La matriz B define un operador acotado sobre $\mathbb{C}^M$ provisto de la norma euclideana. De (3.35) y (3.36) se concluye que la imagen por el operador B de la sucesión

$$\left\{\frac{(n-N)!}{n!}\frac{Q_n^{(N)}(Z)^*}{\mathrm{C}(\Gamma)^{n-N}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{C}^M, \tag{3.37}$$

está contenida en la bola cerrada con centro en el vector nulo de $\mathbb{C}^M$ y radio igual a $K/\min\lambda_i,\ i=1,\cdots,M$.
El operador B es inversible, por estar definido por una matriz unitaria. Luego, el operador B^{-1} transforma la bola cerrada con centro en el origen de $\mathbb{C}^M$ y radio $K/\min\lambda_i$, en un conjunto acotado de $\mathbb{C}^M$. Por consiguiente, la sucesión (3.37)

está acotada en $\mathbb{C}^M$ respecto a la norma euclideana. En virtud de la equivalencia de dos normas cualesquiera sobre un espacio de dimensión finita, concluimos que la sucesión (3.37) está acotada respecto a la norma uniforme, luego,

$$\left\{ \frac{(n-N)!}{n!} \frac{Q_n^{(N+j)}(z_i)}{\mathrm{C}(\Gamma)^{n-N}} \right\}_{n\in\mathbb{N}}, \quad j=0,\cdots,l_i,\ i=1,\cdots,m,$$

está acotada.
Se cumple que

$$\left| \frac{(n-N)!}{n!} \frac{Q_n^{(N+j)}(z_i)}{\mathrm{C}(\Gamma)^{n-N}} \right| = \frac{1}{\mathrm{C}(\Gamma)^j} \left(\frac{(n-N)!}{n!} |\Phi(z_i)|^{n-N-j} \right) \left| \frac{Q_n^{(N+j)}}{[\mathrm{C}(\Gamma)\Phi]^{n-N-j}}(z_i) \right|,$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-N)!}{n!} |\Phi(z_i)|^{n-N-j} = \infty.$$

Luego,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Q_n^{(N+j)}}{[\mathrm{C}(\Gamma)\Phi]^{n-N-j}}(z_i) = 0, \quad j=0,\cdots,l_i,\ i=1,\cdots,m, \tag{3.38}$$

con velocidad geométrica.

Veamos que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{Q_n^{(N)}}{[\mathrm{C}(\Gamma)\Phi]^{n-N}} \right)^{(j)} (z_i) = 0, \quad j=0,\cdots,l_i,\ i=1,\cdots,m, \tag{3.39}$$

con velocidad geométrica.
De acuerdo con la fórmula de Leibniz para la derivada de orden superior de un producto

$$\left(\frac{Q_n^{(N)}}{[\mathrm{C}(\Gamma)\Phi]^{n-N}} \right)^{(j)} (z_i) = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} Q_n^{(N+k)}(z_i) \left(\frac{1}{[\mathrm{C}(\Gamma)\Phi]^{n-N}} \right)^{(j-k)} (z_i). \tag{3.40}$$

La derivada de orden l, $l \in \mathbb{N}$, de la función $1/[\mathrm{C}(\Gamma)\Phi]^{n-N}$ es de la forma

$$\sum_{t=1}^{l} (-1)^t \prod_{r=1}^{t} (n-N+r-1) \frac{C_t}{[\mathrm{C}(\Gamma)\Phi]^{n-N+t}}(z), \tag{3.41}$$

donde $C_t(z)$, $t=1,\cdots,l$, no depende de n, y sólo depende del valor de $\mathrm{C}(\Gamma)$ y de alguno de los valores $\Phi'(z),\cdots,\Phi^{(l)}(z)$. De aquí deducimos que

$$\left(\frac{Q_n^{(N)}}{[\mathrm{C}(\Gamma)\Phi]^{n-N}} \right)^{(j)} (z_i) \tag{3.42}$$

$$= \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \sum_{t=1}^{l} (-1)^t \prod_{r=1}^{t} (n-N+r-1) \frac{Q_n^{(N+k)}}{[\mathrm{C}(\Gamma)\Phi]^{n-N-k}}(z_i) \frac{C_t}{[\mathrm{C}(\Gamma)\Phi]^{k+t}}(z_i).$$

Ahora, a partir de (3.42) y (3.38) obtenemos (3.39). Finalmente, deducimos (3.32) de (3.31) y (3.39). □

Demostración de (3.9) en el Teorema 3.1. Tenemos que

$$\begin{aligned}
&\left\| H_{n-N}^{*} - \frac{(n-N)!}{n!}\frac{Q_n^{(N)}}{\mathrm{C}(\Gamma)^{n-N}} \right\|_{L^2(\rho_N)}^2 = \left\| H_{n-N}^{*}\right\|_{L^2(\rho_N)}^2 \\
&+ \left\| \frac{(n-N)!}{n!}\frac{Q_n^{(N)}}{\mathrm{C}(\Gamma)^{n-N}} \right\|_{L^2(\rho_N)}^2 - 2Re\left\langle H_{n-N}^{*}, \frac{(n-N)!}{n!}\frac{Q_n^{(N)}}{\mathrm{C}(\Gamma)^{n-N}} \right\rangle_{L^2(\rho_N)} .
\end{aligned} \tag{3.43}$$

En relación con el primer término de (3.43), vemos que si Γ es una curva cerrada, entonces

$$\begin{aligned}
\left\| H_{n-N}^{*}\right\|_{L^2(\rho_N)}^2 &= \int_\Gamma |\mathcal{F}^*(\xi)||\Phi(\xi)|^{2(n-N)}\rho_N(\xi)|d\xi| = \oint_\Gamma |\mathcal{F}^*(\xi)|^2\rho_N(\xi)|d\xi| \\
&= \|\mathcal{F}^*\|_{H^2(\Omega,\rho_N)}^2 = \nu^*(\rho_N),
\end{aligned} \tag{3.44}$$

debido a que $\mathcal{F}^*$ es la solución del problema extremal (1.22) y $|\Phi(\xi)| = 1$ para $\xi \in \Gamma$. Si Γ es un arco, se cumple que

$$\begin{aligned}
&\left\| H_{n-N}^{*}\right\|_{L^2(\rho_N)}^2 = \left\langle \mathcal{F}_+^*\Phi_+^{n-N} + \mathcal{F}_-^*\Phi_-^{n-N}, \mathcal{F}_+^*\Phi_+^{n-N} + \mathcal{F}_-^*\Phi_-^{n-N} \right\rangle_{L^2(\rho_N)} \\
&= \int_\Gamma |\mathcal{F}_+^*(\xi)|^2 \left|\Phi_+(\xi)\right|^{2(n-N)} \rho_N(\xi)|d\xi| + \int_\Gamma |\mathcal{F}_-^*(\xi)|^2 \left|\Phi_-(\xi)\right|^{2(n-N)} \rho_N(\xi)|d\xi| \\
&\quad +2Re\langle \mathcal{F}_+^*\Phi_+^{n-N}, \mathcal{F}_-^*\Phi_-^{n-N}\rangle_{L^2(\rho_N)} \\
&= \oint_\Gamma |\mathcal{F}^*(\xi)|^2\rho_N(\xi)|d\xi| + 2Re\int_\Gamma \Phi_+^{n-N}(\xi)\overline{\Phi_-^{n-N}(\xi)}\mathcal{F}_+^*(\xi)\overline{\mathcal{F}_-^*(\xi)}\rho_N(\xi)|d\xi| \\
&= \|\mathcal{F}^*\|_{H^2(\Omega,\rho_N)}^2 + 2Re\int_\Gamma \Phi_+^{n-N}(\xi)\Phi_-^{-(n-N)}(\xi)\mathcal{F}_+^*(\xi)\overline{\mathcal{F}_-^*(\xi)}\rho_N(\xi)|d\xi|.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Pero de acuerdo con (1.18) y (1.29) se cumple

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Gamma \Phi_+^{n-N}(\xi)\Phi_-^{-(n-N)}(\xi)\mathcal{F}_+^*(\xi)\overline{\mathcal{F}_-^*(\xi)}\rho_N(\xi)|d\xi| = 0.$$

Luego, si Γ es un arco o una curva cerrada, es

$$\lim_{n\to\infty}\left\| H_{n-N}^{*}\right\|_{L^2(\rho_N)}^2 = \nu^*(\rho_N). \tag{3.46}$$

Consideremos el segundo término en el miembro derecho de (3.43). Como

$$\|Q_n^{(N)}\|^2_{L^2(\rho_N)} \leq \|Q_n^{(N)}\|^2_N \leq \|Q_n\|^2_s = \kappa_n,$$

entonces

$$\left(\frac{(n-N)!}{n!}\right)^2 \frac{\|Q_n^{(N)}\|^2_{L^2(\rho_N)}}{\mathrm{C}(\Gamma)^{2(n-N)}} \leq \left(\frac{(n-N)!}{n!}\right)^2 \frac{\kappa_n}{\tau_{n-N}} \frac{\tau_{n-N}}{\mathrm{C}(\Gamma)^{2(n-N)}}. \tag{3.47}$$

Aplicando (1.26) y (3.8) obtenemos

$$\limsup_{n\to\infty} \left\| \frac{(n-N)!}{n!} \frac{Q_n^{(N)}}{\mathrm{C}(\Gamma)^{n-N}} \right\|^2_{L^2(\rho_N)} \leq \nu^*(\rho_N). \tag{3.48}$$

Pasemos ahora al tercer término en (3.43).

Si Γ es una curva cerrada es

$$\left\langle Q_n^{(N)}, H^*_{n-N} \right\rangle_{L^2(\rho_N)} = \int_\Gamma Q_n^{(N)}(\xi) \overline{\mathcal{F}^*(\xi)\Phi^{n-N}(\xi)} \rho_N(\xi)|d\xi| = \left\langle \frac{Q_n^{(N)}}{\Phi^{n-N}}, \mathcal{F}^* \right\rangle_{H^2(\Omega,\rho_N)}.$$

Si Γ es un arco obtenemos

$$\begin{aligned}
&\left\langle Q_n^{(N)}, H^*_{n-N} \right\rangle_{L^2(\rho_N)} = \int_\Gamma Q_n^{(N)}(\xi) \overline{H^*_{n-N}(\xi)} \rho_N(\xi)|d\xi| \\
&= \int_\Gamma \left(Q_n^{(N)}(\xi) \overline{\mathcal{F}^*_+(\xi)\Phi^{n-N}_+(\xi)} + Q_n^{(N)}(\xi) \overline{\mathcal{F}^*_-(\xi)\Phi^{n-N}_-(\xi)} \right) \rho_N(\xi)|d\xi| \\
&= \int_\Gamma \left(\frac{Q_n^{(N)}(\xi)}{\Phi^{n-N}_+(\xi)} \overline{\mathcal{F}^*_+(\xi)} + \frac{Q_n^{(N)}(\xi)}{\Phi^{n-N}_-(\xi)} \overline{\mathcal{F}^*_-(\xi)} \right) \rho_N(\xi)|d\xi| \\
&= \oint_\Gamma \frac{Q_n^{(N)}(\xi)}{\Phi^{n-N}(\xi)} \overline{\mathcal{F}^*(\xi)} \rho_N(\xi)|d\xi| = \left\langle \frac{Q_n^{(N)}}{\Phi^{n-N}}, \mathcal{F}^* \right\rangle_{H^2(\Omega,\rho_N)}.
\end{aligned}$$

Aquí hemos usado nuevamente que $|\Phi| = 1$ ($|\Phi_\pm| = 1$) sobre Γ y que $Q_n^{(N)}$ es univaluada en $\mathbb{C}$. Luego, si Γ es un arco o una curva cerrada, de la definición de Ψ_{n-N}, de la observación anterior, de (1.23), (1.18), de las propiedades de $B(z)$, obtenemos

$$\begin{aligned}
&\left\langle \frac{(n-N)!}{n!} \frac{Q_n^{(N)}}{\mathrm{C}(\Gamma)^{n-N}}, H^*_{n-N} \right\rangle_{L^2(\rho_N)} = \langle \Psi_{n-N}, \mathcal{F}^* \rangle_{H^2(\Omega,\rho_N)} \\
&= \nu(\rho_N) \langle \Psi_{n-N}, BK(\cdot,\infty) \rangle_{H^2(\Omega,\rho_N)} = \nu(\rho_N) \left\langle \frac{\Psi_{n-N}}{B} |B|^2, K(\cdot,\infty) \right\rangle_{H^2(\Omega,\rho_N)} \\
&= \nu^*(\rho_N) \left\langle \frac{\Psi_{n-N}}{B}, K(\cdot,\infty) \right\rangle_{H^2(\Omega,\rho_N)}.
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Observemos que $(\Psi_{n-N}/B)(\infty) = 1$, y $\Psi_{n-N}/B \notin H^2(\Omega, \rho_N)$, debido a que los puntos $z_i,\ i = 1, \cdots, m$, son polos de esta función.

Para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\frac{\Psi_{n-N}(z)}{B(z)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{l_i} \frac{a_{n-N}^{(i,j)}}{(z - z_i)^j} + g_n(z), \quad g_n \in H^2(\Omega, \rho_N),\ g_n(\infty) = 1. \tag{3.50}$$

Sustituyendo en (3.49) y usando la propiedad (1.14) del núcleo reproductor se obtiene

$$\begin{aligned} &\left\langle \frac{(n-N)!}{n!} \frac{Q_n^{(N)}}{\mathrm{C}(\Gamma)^{n-N}}, H_{n-N}^* \right\rangle_{L^2(\rho_N)} \\ &= \nu^*(\rho_N) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{l_i} a_{n-N}^{(i,j)} \left\langle \frac{1}{(z - z_i)^j}, K(\cdot, \infty) \right\rangle_{H^2(\Omega, \rho_N)}. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Supongamos ahora que

$$\liminf_{n\to\infty}\ Re \left\langle \frac{(n-N)!}{n!} \frac{Q_n^{(N)}}{\mathrm{C}(\Gamma)^{n-N}}, H_{n-N}^* \right\rangle_{L^2(\rho_N)} < \nu^*(\rho_N). \tag{3.52}$$

Sea $\Lambda \subset \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} &\lim_{n\in\Lambda}\ Re \left\langle \frac{(n-N)!}{n!} \frac{Q_n^{(N)}}{\mathrm{C}(\Gamma)^{n-N}}, H_{n-N}^* \right\rangle_{L^2(\rho_N)} \\ &= \liminf_{n\to\infty}\ Re \left\langle \frac{(n-N)!}{n!} \frac{Q_n^{(N)}}{\mathrm{C}(\Gamma)^{n-N}}, H_{n-N}^* \right\rangle_{L^2(\rho_N)}. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Como $\{\Psi_{n-N}\}$ es normal en Ω, existe $\Lambda' \subset \Lambda$ y $\Psi_{\Lambda'} \in H(\Omega)$ tal que para $n \in \Lambda'$, se cumple

$$\Psi_{n-N}^{(j)} \rightrightarrows \Psi_{\Lambda'}^{(j)}\ \ en\ \Omega, \quad j \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.54}$$

De (3.32) deducimos entonces que

$$\Psi_{\Lambda'}^{(j)}(z_i) = 0, \quad j = 0, \cdots, l_i,\ i = 1, \cdots, m. \tag{3.55}$$

Por la definición de $B(z)$ y de las dos últimas relaciones, obtenemos que la función $\Psi_{\Lambda'}/B \in H^2(\Omega, \rho_N)$ y

$$\frac{\Psi_{n-N}}{B} \rightrightarrows \frac{\Psi_{\Lambda'}}{B}\ \ en\ \Omega. \tag{3.56}$$

para $n \in \Lambda'$.

De (3.50) concluimos que $a_{n-N}^{(i,j)} \to 0$, $j = 0, \cdots, l_i$, $i = 1, \cdots, m$ para $n \in \Lambda'$. Ahora, de (3.51) deducimos que

$$\lim_{n \in \Lambda'} Re \left\langle \frac{(n-N)!}{n!} \frac{Q_n^{(N)}}{\mathrm{C}(\Gamma)^{n-N}}, H_{n-N}^* \right\rangle_{L^2(\rho_N)} = \nu^*(\rho_N). \tag{3.57}$$

Finalmente, como $\Lambda' \subset \Lambda$, de (3.53) y (3.57) llegamos a una contradicción con lo supuesto en (3.52). Luego,

$$\liminf_{n \to \infty} Re \left\langle H_{n-N}^*, \frac{(n-N)!}{n!} \frac{Q_n^{(N)}}{\mathrm{C}(\Gamma)^{n-N}} \right\rangle_{L^2(\rho_N)} \geq \nu^*(\rho_N). \tag{3.58}$$

Tomando límite superior en ambos miembros de (3.43), se deduce (3.9) a partir de (3.46), (3.48) y (3.58). Con esto finaliza la demostración del teorema 3.1. $\square$

3.2. Asintótica de los polinomios de Sobolev

A continuación se describe el comportamiento asintótico de las derivadas $Q_n^{(N)}$ cuando $n \to \infty$. De (3.60) concluimos que $\frac{1}{n^N} Q_n^{(N)}$ se comporta, asintóticamente, como L_{n-N}. Además, este comportamiento es independiente de los primeros N términos en el producto interno (3.4).

Teorema 3.2 *Con las hipótesis del teorema 3.1, se cumple que*

$$Q_n^{(N)}(z) = n^N [\mathrm{C}(\Gamma)\Phi(z)]^{n-N} \mathcal{F}^*(z)(1 + \varepsilon_n(z)), \tag{3.59}$$

donde $\varepsilon_n \rightrightarrows 0$ *en* Ω, *o equivalentemente,*

$$\frac{Q_n^{(N)}(z)}{n^N L_{n-N}(z)} \rightrightarrows 1 \text{ en } \Omega. \tag{3.60}$$

Demostración del Teorema 3.2. Si Γ es una curva cerrada,

$$\left\| \mathcal{F}^* - \frac{(n-N)!}{n!} \frac{Q_n^{(N)}}{[\mathrm{C}(\Gamma)\Phi]^{n-N}} \right\|_{H^2(\Omega,\rho_N)} = \left\| H_{n-N}^* - \frac{(n-N)!}{n!} \frac{Q_n^{(N)}}{\mathrm{C}(\Gamma)^{n-N}} \right\|_{L^2(\rho_N)}.$$

En virtud de (3.9) y (1.28) es

$$\frac{Q_n^{(N)}}{n^N [\mathrm{C}(\Gamma)\Phi]^{n-N}}(z) \rightrightarrows \mathcal{F}^*(z) \text{ en } \Omega, \tag{3.61}$$

lo cual, por (1.27), es equivalente a (3.60).
Si Γ es un arco, entonces (1.14) implica que

$$\frac{(n-N)!}{n!}\frac{Q_n^{(N)}}{[\mathrm{C}(\Gamma)\Phi]^{n-N}}(z)=\left\langle\frac{(n-N)!}{n!}\frac{Q_n^{(N)}}{[\mathrm{C}(\Gamma)\Phi]^{n-N}},K(\cdot,z)\right\rangle_{H^2(\Omega,\rho_N)}$$

$$=\oint_\Gamma\frac{(n-N)!}{n!}\frac{Q_n^{(N)}}{[\mathrm{C}(\Gamma)\Phi]^{n-N}}(\xi)\overline{K(\xi,z)}\rho_N(\xi)|d\xi|$$

$$=\oint_\Gamma\frac{(n-N)!}{n!}\frac{Q_n^{(N)}(\xi)}{\mathrm{C}(\Gamma)^{n-N}}\overline{\left(\frac{K(\xi,z)}{\overline{\Phi^{n-N}(\xi)}}\right)}\rho_N(\xi)|d\xi|$$

$$=\oint_\Gamma\frac{(n-N)!}{n!}\frac{Q_n^{(N)}(\xi)}{\mathrm{C}(\Gamma)^{n-N}}\overline{\Phi^{n-N}(\xi)K(\xi,z)}\rho_N(\xi)|d\xi|$$

$$=\int_\Gamma\frac{(n-N)!}{n!}\frac{Q_n^{(N)}(\xi)}{\mathrm{C}(\Gamma)^{n-N}}\left(\overline{\Phi_+^{n-N}(\xi)K_+(\xi,z)+\Phi_-^{n-N}(\xi)K_-(\xi,z)}\right)\rho_N(\xi)|d\xi|$$

$$=\left\langle H_{n-N}^*,\Phi_+^{n-N}K_+(\cdot,z)+\Phi_-^{n-N}K_-(\cdot,z)\right\rangle_{L^2(\rho_N)}$$

$$-\left\langle H_{n-N}^*-\frac{(n-N)!}{n!}\frac{Q_n^{(N)}}{\mathrm{C}(\Gamma)^{n-N}},\Phi_+^{n-N}K_+(\cdot,z)+\Phi_-^{n-N}K_-(\cdot,z)\right\rangle_{L^2(\rho_N)}.$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y (3.9), es fácil ver que el segundo sumando de la última igualdad tiende a cero cuando $n\to\infty$. Además,

$$\left\langle H_{n-N}^*,\Phi_+^{n-N}K_+(\cdot,z)+\Phi_-^{n-N}K_-(\cdot,z)\right\rangle_{L^2(\rho_N)}=\langle\mathcal{F}^*,K(.,z)\rangle_{H^2(\Omega,\rho)}$$

$$+\int_\Gamma\{\mathcal{F}_+^*(\xi)\Phi_+^{n-N}(\xi)\Phi_-^{-(n-N)}(\xi)\overline{K_-(\xi,z)}$$

$$+\mathcal{F}_-^*(\xi)\Phi_+^{-(n-N)}(\xi)\Phi_-^{n-N}(\xi)\overline{K_+(\xi,z)}\}\rho_N(\xi)|d\xi|$$

$$=\mathcal{F}^*(z)+\int_\Gamma\{\mathcal{F}_+^*(\xi)\Phi_+^{n-N}(\xi)\Phi_-^{-(n-N)}(\xi)\overline{K_-(\xi,z)}$$

$$+\mathcal{F}_-^*(\xi)\Phi_+^{-(n-N)}(\xi)\Phi_-^{n-N}(\xi)\overline{K_+(\xi,z)}\}\rho_N(\xi)|d\xi|.$$

En la última igualdad, el segundo sumando tiende a cero cuando $n\to\infty$ por ser coeficiente de Fourier de una función integrable. Luego, cuando Γ es un arco también se cumple (3.61). Con esto obtenemos la asintótica de la derivada $Q_n^{(N)}$. □

Si en el teorema 3.1 se asume adicionalmente que las medidas $\{\mu_k\}_{k=0}^{N-1}$ son absolutamente continuas respecto a la medida lineal de Lebesgue sobre Γ y satisfacen la condición de *Szegö*, entonces se obtiene el comportamiento asintótico de los propios polinomios Q_n y de todas sus derivadas hasta el orden $N-1$ inclusive.

TEOREMA 3.3 *Si las medidas positivas finitas de Borel y absolutamente continuas* $\mu_k \in S(\Gamma)$, $k = 0, \cdots, N$, *entonces*

$$Q_n^{(k)}(z) = n^k \frac{C(\Gamma)^{n-N}\Phi(z)^{n-k}}{(\Phi'(z))^{N-k}} \mathcal{F}^*(z)(1+\varepsilon_n(z)), \tag{3.62}$$

donde $\varepsilon_n \rightrightarrows 0$ *en* Ω, *o equivalentemente*

$$\frac{Q_n^{(k)}(z)}{n^k L_{n-k}(z)} \rightrightarrows \frac{1}{([C(\Gamma)\Phi]'(z))^{N-k}} \ \ en\ \Omega. \tag{3.63}$$

para $k = 0 \ldots, N$.

De (3.6), (3.62) y el teorema de Hurwitz, derivamos la localización asintótica de los ceros de los polinomios Q_n. Sea $G = \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$; luego, G es un abierto conexo si Γ es una curva cerrada, y es vacío si Γ es un arco.

COROLARIO 3.2.1 *Con las suposiciones del teorema 3.3, para n suficientemente grande, cada punto* z_i, $i = 1, \cdots, m$, *atrae exactamente* $l_i + 1$ *ceros de* Q_n, *mientras que los restantes ceros se acumulan sobre* $\Gamma \cup G$.

Antes de pasar a la demostración del teorema 3.3, veamos el siguiente lema.

LEMA 3.2.1 *Sea* $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq N$. *Bajo las hipótesis del teorema 3.3, se tiene*

$$\frac{Q_n^{(k)}}{n^i[C(\Gamma)\Phi]^{n-k}}(z) \rightrightarrows 0 \ \ en\ \Omega, \quad k = 0, \cdots, i-1.$$

Demostración. Se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\kappa_n}{n^{2N} C(\Gamma)^{2(n-N)}} &= \sum_{k=0}^{N-1} \left\| \frac{Q_n^{(k)}}{n^N\, C(\Gamma)^{n-N}} \right\|_k^2 + \left\| \frac{Q_n^{(N)}}{n^N\, C(\Gamma)^{n-N}} \right\|_N^2 \\
&\geq \sum_{k=0}^{N-1} \left\| \frac{Q_n^{(k)}}{n^N C(\Gamma)^{n-N}} \right\|_{L^2(\rho_k)}^2 + \left\| \frac{Q_n^{(N)}}{n^N\, C(\Gamma)^{n-N}} \right\|_{L^2(\rho_N)}^2 .
\end{aligned}$$

Como (ver (3.34))

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\kappa_n}{n^{2N} C(\Gamma)^{2(n-N)}} = \nu^*(\rho_N),$$

y, según (3.9) y (3.46) se cumple

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{Q_n^{(N)}}{n^N C(\Gamma)^{n-N}} \right\|_{L^2(\rho_N)}^2 = \lim_{n\to\infty} \left\| H_{n-N}^* \right\|_{L^2(\rho_N)}^2 = \|\mathcal{F}^*\|_{H^2(\Omega,\rho_N)}^2 = \nu^*(\rho_N),$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{N-1}\left\|\frac{Q_n^{(k)}}{n^N \mathrm{C}(\Gamma)^{n-N}}\right\|_{L^2(\rho_k)}^2=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{\mathrm{C}(\Gamma)^{2(N-k)}}\left\|\frac{Q_n^{(k)}}{n^N \mathrm{C}(\Gamma)^{n-N}}\right\|_{L^2(\rho_k)}^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{N-1}\left\|\frac{Q_n^{(k)}}{n^N [\mathrm{C}(\Gamma)\Phi]^{n-k}}\right\|_{L^2(\rho_k)}^2=0,$$

lo cual es equivalente a

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{Q_n^{(k)}}{n^N [\mathrm{C}(\Gamma)\Phi]^{n-k}}\right\|_{L^2(\rho_k)}^2=0,\quad k=0,\cdots,N-1.$$

Como por hipótesis, $\mu_k\in S(\Gamma),\ \ k=0,\cdots,N$, aplicando (1.28) obtenemos

$$\frac{Q_n^{(k)}}{n^N [\mathrm{C}(\Gamma)\Phi]^{n-k}}(z)\rightrightarrows 0\ \ en\ \Omega,\quad k=0,\cdots,N-1. \tag{3.64}$$

Luego, el lema es cierto para $i=N$.
Por el Teorema de Weierstrass, también se cumple

$$\left[\frac{Q_n^{(k)}}{n^N\,[\mathrm{C}(\Gamma)\Phi]^{n-k}}\right]'(z)\rightrightarrows 0\ \ en\ \Omega,\quad k=0,\cdots,N-1. \tag{3.65}$$

Es fácil ver que para $k=0,\cdots,N-1$ es

$$\begin{aligned}&\frac{(n-k)\Phi'(z)}{n\Phi(z)}\frac{Q_n^{(k)}}{n^{N-1}[\mathrm{C}(\Gamma)\Phi]^{n-k}}(z)\\&=\frac{1}{\mathrm{C}(\Gamma)\Phi(z)}\frac{Q_n^{(k+1)}}{n^N[\mathrm{C}(\Gamma)\Phi]^{n-(k+1)}}(z)-\left[\frac{Q_n^{(k)}}{n^N[\mathrm{C}(\Gamma)\Phi]^{n-k}}\right]'(z).\end{aligned} \tag{3.66}$$

Entonces, aplicando (3.64) concluimos que

$$\frac{Q_n^{(k)}(z)}{n^{N-1}[\mathrm{C}(\Gamma)\Phi]^{n-k}(z)}\rightrightarrows 0\ \ en\ \Omega,\quad k=0,\cdots,N-2.$$

Repitiendo este razonamiento, se concluye la demostración. □

Demostración del Teorema 3.3. Para $k=N$, (3.62) coincide con (3.59). Para $1\le k<N$ tenemos

$$\begin{aligned}&\frac{(n+1-k)\Phi'(z)}{n\Phi(z)}\frac{Q_n^{(k-1)}}{n^{k-1}[\mathrm{C}(\Gamma)\Phi]^{n-(k-1)}}(z)\\&=\frac{1}{\mathrm{C}(\Gamma)\Phi(z)}\frac{Q_n^{(k)}}{n^k[\mathrm{C}(\Gamma)\Phi]^{n-k}}(z)-\left[\frac{Q_n^{(k-1)}}{n^k[\mathrm{C}(\Gamma)\Phi]^{n-(k-1)}}\right]'(z).\end{aligned} \tag{3.67}$$

Del lema 3.2.1 y el teorema de Weierstrass deducimos que

$$\left[\frac{Q_n^{(k)}}{n^N\,[\mathrm{C}(\Gamma)\Phi]^{n-k}}\right]'(z) \rightrightarrows 0 \ \ en\ \Omega, \quad k=0,\cdots,N-1. \tag{3.68}$$

Supongamos ahora que (3.62) es cierta para un k tal que $1 \leq k < N$, entonces

$$\frac{Q_n^{(k)}(z)}{n^k[\mathrm{C}(\Gamma)\Phi]^{n-k}(z)} \rightrightarrows \frac{\mathcal{F}^*(z)}{\left([\mathrm{C}(\Gamma)\Phi]'(z)\right)^{N-k}} \ \ en\ \Omega. \tag{3.69}$$

De esta manera obtenemos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\mathrm{C}(\Gamma)\Phi(z)}\frac{Q_n^{(k)}(z)}{n^k[\mathrm{C}(\Gamma)\Phi]^{n-k}(z)} - \left[\frac{Q_n^{(k-1)}}{n^k[\mathrm{C}(\Gamma)\Phi]^{n-(k-1)}}\right]'(z)\\ &\rightrightarrows \frac{1}{\mathrm{C}(\Gamma)\Phi(z)}\frac{\mathcal{F}^*(z)}{\left([\mathrm{C}(\Gamma)\Phi]'(z)\right)^{N-k}} \ \ en\ \Omega.\end{aligned} \tag{3.70}$$

Luego, de (3.67) deducimos

$$\frac{Q_n^{(k-1)}(z)}{n^{k-1}[\mathrm{C}(\Gamma)\Phi]^{n-(k-1)}(z)} \rightrightarrows \frac{\mathcal{F}^*(z)}{\left([\mathrm{C}(\Gamma)\Phi]'(z)\right)^{N-(k-1)}} \ \ en\ \Omega.$$

Es decir, la afirmación es cierta para $k-1$. Del razonamiento anterior se concluye la validez de (3.62) para $k=0,\cdots,N$.

Por otra parte, (3.63) es una consecuencia directa de (3.62) y (1.27). $\square$

Capítulo 4:

POLINOMIOS EXTREMALES EN $\mathbb{C}$

Capítulo 4

POLINOMIOS EXTREMALES EN $\mathbb{C}$

Consideremos una medida μ positiva finita de Borel, cuyo soporte $\mathrm{S}(\mu)$ es un subconjunto compacto del plano complejo $\mathbb{C}$ que contiene infinitos puntos, y sean $\Lambda = (\lambda_j), 0 \leq j \leq N$, una matriz diagonal de funciones medibles Borel, positivas y acotadas μ casi dondequiera, y $U = (u_{j,k}), 0 \leq j,k \leq N$, una matriz cuadrada de funciones medibles Borel y acotadas, tal que la matriz

$$U(z) = (u_{j,k}(z))\,, \quad 0 \leq j,k \leq N,$$

es unitaria μ casi dondequiera. Diremos entonces que U es unitaria. Sea

$$W = U\Lambda U^*, \tag{4.1}$$

donde U^* denota la transpuesta conjugada de U.

Sea $T = (T_0, \cdots, T_N)$, donde $T_j : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$, $j = 0, \cdots, N$, son aplicaciones lineales. Supondremos que T es inyectivo. Fijemos $p, 1 \leq p < \infty$. Sea

$$\begin{aligned} \|q\|_1 &= \left(\int \left[T(q)W^{2/p}T(q)^*\right]^{p/2} d\mu\right)^{1/p} \\ &= \left(\int \left[T(q)U\Lambda^{2/p}U^*T(q)^*\right]^{p/2} d\mu\right)^{1/p}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Para simplificar, decidimos partir de la descomposición (4.1) para definir $\|\cdot\|_1$. Pudiéramos haber partido de una matriz W definida positiva μ casi dondequiera, constituida por funciones medibles Borel y acotadas, o aún de una matriz de medidas que evaluada sobre cada conjunto boreliano, es semidefinida positiva (ver, por ejemplo, Lema 11, página 1341, [9]). Bajo condiciones generales sobre W, o sobre la matriz de medidas, se puede garantizar la existencia de una descomposición (no constructiva) del tipo (4.1), pero esta es una cuestión delicada que preferimos evitar en aras de preservar el carácter constructivo de nuestros argumentos. Un caso simple en el que no hay dificultades en llevar a cabo la descomposición, es cuando W

es una matriz definida positiva con elementos constantes o, más generalmente, con elementos continuos.

Bajo las condiciones impuestas, $\|\cdot\|_1$ define una norma sobre $\mathcal{P}$. Las dos observaciones siguientes justifican la consideración de esta norma.

(i) La norma (2.3) inducida por el producto interno de Sobolev (2.1) considerado en el Capítulo 2, es un caso particular de esta norma. En efecto, de (2.2) tenemos que

$$\|q\|_S \;=\; \left(\sum_{j=0}^{N}\int |q^{(j)}(z)|^2\lambda_j\,d\mu(z)\right)^{1/2}. \tag{4.3}$$

Luego, si en (4.2) tomamos $p=2$, μ y λ_j como en (4.3), es decir, $\mu=\sum_{j=0}^{N}\mu_j$, donde $\{\mu_j\}_{j=0}^{N}$ es la familia de medidas que define el producto interno de Sobolev (2.1), y λ_j es la derivada de Radon-Nikodym de μ_j con respecto a μ, $T(q)=(q,q^{(1)},\cdots,q^{(N)})$ y U igual a la matriz identidad, entonces (4.2) coincide con (4.3).

A propósito de esta situación, en que $p=2$ y $T(q)=(q,q^{(1)},\cdots,q^{(N)})$ en (4.2); notemos que en el caso en que la matriz de funciones $W=(w_{i,j})_{i,j=0}^{N}$ es no diagonal, en la expresión de $\|q\|_1$ en general aparecen productos de derivadas de órdenes diferentes del polinomio q. Por ejemplo, la norma $\|\cdot\|_1$ de tamaño 2×2 viene dada por

$$\begin{aligned}\|q\|_1^2 \;&=\; \sum_{j=0}^{1}\int |q^{(j)}(z)|^2 w_{j,j}(z)\,d\mu(z)\\ &+\; \int q(z)\overline{q'(z)}w_{0,1}(z)\,d\mu(z)+\int q'(z)\overline{q(z)}w_{1,0}(z)\,d\mu(z).\end{aligned}$$

Más general, para $p=2$, $\|\cdot\|_1$ coincide con la norma definida por el producto interno no standard considerado en [12].

(ii) Otra situación de mucho interés es la que corresponde al caso en que en (4.2) se tiene $p=2$ y

$$T_j(q)=\sum_n \frac{q^{(n(N+1)+j)}(0)}{(n(N+1)+j)!}\,z^n\,,\qquad j=0,\cdots,N. \tag{4.4}$$

Estos operadores aparecen en [10] en relación con el estudio de sucesiones de polinomios sobre el eje real que satisfacen relaciones de recurrencia a $2N+3$ términos. Es bien conocido que existe una estrecha relación entre polinomios que satisfacen relaciones de recurrencia de orden superior y polinomios ortogonales matriciales (ver [11]). Estos últimos constituyen una de las áreas principales de investigación en la teoría de polinomios ortogonales.

En este capítulo se extienden los resultados obtenidos en el Capítulo 2 sobre localización de ceros y distribución asintótica de ceros de polinomios ortogonales de Sobolev, al caso de polinomios extremales con respecto a una norma de la forma (4.2) dada sobre el espacio $\mathcal{P}$ de los polinomios.

4.1. Localización de ceros

LEMA 4.1.1 *Para $1 < p < \infty$, $\|\cdot\|_1$ define una norma estrictamente convexa sobre el espacio $\mathcal{P}$.*

Demostración. Nos convencemos de que $\|\cdot\|_1$ define una norma sobre $\mathcal{P}$, observando que si denotamos por $\|\cdot\|_{euc}$ a la norma euclidiana sobre $\mathbb{C}^{N+1}$, entonces

$$\|q\|_1 = \|\|T(q)U\Lambda^{1/p}\|_{euc}\|_{L^p(\mu)}. \tag{4.5}$$

Para probar que $\|\cdot\|_1$ es estrictamente convexa, es suficiente mostrar que si q, r son polinomios no idénticamente iguales a cero y $\|q+r\|_1 = \|q\|_1 + \|r\|_1$, entonces existe $\alpha > 0$ tal que $r \equiv \alpha q$ (ver (1.6)).
Hagamos $\widetilde{q} = T(q)U\Lambda^{1/p}$ en (4.5). Entonces, empleando la desigualdad triangular y la monotonía de la integral, tenemos

$$\begin{aligned} \|q+r\|_1 &= \|\|\widetilde{q+r}\|_{euc}\|_{L^p(\mu)} = \|\|\widetilde{q}+\widetilde{r}\|_{euc}\|_{L^p(\mu)} \leq \|\|\widetilde{q}\|_{euc} + \|\widetilde{r}\|_{euc}\|_{L^p(\mu)} \\ &\leq \|\|\widetilde{q}\|_{euc}\|_{L^p(\mu)} + \|\|\widetilde{r}\|_{euc}\|_{L^p(\mu)} = \|q\|_1 + \|r\|_1. \end{aligned}$$

Si $\|q+r\|_1 = \|q\|_1 + \|r\|_1$, tenemos igualdad en cada paso anterior. Entonces (ver página 63 en [41]), existe un $\alpha > 0$ tal que

$$\|\widetilde{r}\|_{euc} = \alpha\|\widetilde{q}\|_{euc}$$

μ casi dondequiera. También tenemos

$$\|\widetilde{q}+\widetilde{r}\|_{euc} = \|\widetilde{q}\|_{euc} + \|\widetilde{r}\|_{euc}$$

μ casi dondequiera. Si $z \in \mathrm{S}(\mu)$, la última igualdad nos revela que μ casi dondequiera existe $\alpha(z) > 0$ tal que

$$\widetilde{r}(z) = \alpha(z)\widetilde{q}(z).$$

Entonces

$$\|\widetilde{r}(z)\|_{euc} = \alpha(z)\|\widetilde{q}(z)\|_{euc}.$$

Como $q \not\equiv 0$, $\|\widetilde{q}(z)\|_{euc} \neq 0$, y $\alpha(z) = \alpha$ μ casi dondequiera. Por consiguiente,

$$\widetilde{r} = T(r)U\Lambda^{1/p} = \alpha\widetilde{q} = T(\alpha q)U\Lambda^{1/p}$$

μ casi dondequiera. Como $U\Lambda^{1/p}$ es inyectiva μ casi dondequiera y T es inyectivo, obtenemos que $r = \alpha q$ μ casi dondequiera. De esta forma $r \equiv \alpha q$ como se quería probar. $\square$

Estamos interesados en encontrar condiciones suficientes que garanticen la acotación del operador de multiplicación $M(q) = zq(z)$ sobre $(\mathcal{P}, \|\cdot\|_1)$. La razón de nuestro interés proviene del resultado siguiente, el cual extiende el Teorema 2.1 del Capítulo 2 a cualquier norma sobre $\mathcal{P}$.

TEOREMA 4.1 *Sea $(\mathcal{P}, \|\cdot\|)$ un espacio normado y supongamos que*

$$\|M\| = \sup_{\|q\|=1} \|M(q)\| < +\infty.$$

Sea $q_n = z^n + \cdots$, $n = 1, 2, \cdots$, tal que

$$\|q_n\| = \text{ínf}\{\, \|q\| : q(z) = z^n + \cdots\}. \tag{4.6}$$

Entonces los ceros de q_n se encuentran en el disco $\{z : |z| \leq 2\|M\|\}$.

Demostración. Sea z_0 un cero de q_n. Entonces existe un polinomio mónico q de grado $n-1$, tal que $q_n = (z - z_0)q$. Como q_n satisface (4.6), tenemos

$$|z_0|\|q\| - \|zq\| \leq \|z_0 q - zq\| = \|q_n\| \leq \|zq\|.$$

Entonces

$$|z_0|\|q\| \leq 2\|zq\| \leq 2\|M\|\|q\|.$$

Como $\|q\| \neq 0$, obtenemos inmediatamente la conclusión. □

Es fácil ver que en el Teorema 4.1 no podemos sustituir la norma por una seminorma. En efecto, supongamos que existe un polinomio $q, q \not\equiv 0$, tal que $\|q\| = 0$. Obviamente, para cualquier constante $c \neq 0$, el polinomio cq satisface las mismas condiciones. Sea $n > \mathit{grad}\ q$ y q_n un polinomio extremal mónico de grado n. Es fácil ver que $q_n + cq$ es también un polinomio extremal mónico para todo c. Tomando c suficientemente grande, podemos tener ceros de $q_n + cq$ tan grandes como queramos.

Con el fín de encontrar condiciones suficientes que garanticen la acotación del operador de multiplicación sobre $(\mathcal{P}, \|\cdot\|_1)$, lo que haremos a continuación es buscar una norma sobre $\mathcal{P}$, equivalente a $\|\cdot\|_1$, con respecto a la cual resulte fácil dar tales condiciones.

Sea $U = [u_0, \cdots, u_N]$ donde $u_j, 0 \leq j \leq N$, son los vectores columnas de U. Notemos que

$$T(q)W^{2/p}T(q)^* = \sum_{j=0}^{N} \lambda_j^{2/p} |T(q)u_j|^2$$

μ casi dondequiera. Es bien conocido (ver [18], Teorema 27 y páginas 71–72) que para $x_j \geq 0$, $j = 0, 1, \ldots, N$, se cumple

$$\sum_{j=0}^{N} x_j^\alpha \leq \left(\sum_{j=0}^{N} x_j\right)^\alpha \leq (N+1)^{\alpha-1} \sum_{j=0}^{N} x_j^\alpha, \quad \alpha \geq 1, \tag{4.7}$$

y

$$(N+1)^{\alpha-1} \sum_{j=0}^{N} x_j^\alpha \leq \left(\sum_{j=0}^{N} x_j\right)^\alpha \leq \sum_{j=0}^{N} x_j^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Usando estas desigualdades, tenemos que

$$\sum_{j=0}^{N} \lambda_j |T(q)u_j|^p \leq \left|T(q)W^{2/p}T(q)^*\right|^{p/2} \leq (N+1)^{(p-2)/2} \sum_{j=0}^{N} \lambda_j |T(q)u_j|^p$$

para $p \geq 2$ μ casi dondequiera, y si $1 \leq p < 2$, entonces

$$(N+1)^{(p-2)/2} \sum_{j=0}^{N} \lambda_j |T(q)u_j|^p \leq \left|T(q)W^{2/p}T(q)^*\right|^{p/2} \leq \sum_{j=0}^{N} \lambda_j |T(q)u_j|^p.$$

Por consiguiente, para todo $p \geq 1$ existen constantes positivas C_1, C_2, tales que

$$C_1 \sum_{j=0}^{N} \lambda_j |T(q)u_j|^p \leq \left|T(q)W^{2/p}T(q)^*\right|^{p/2} \leq C_2 \sum_{j=0}^{N} \lambda_j |T(q)u_j|^p. \tag{4.8}$$

Para $q \in \mathcal{P}$, sean

$$\begin{aligned} \|q\|_2 &= \left(\sum_{j=0}^{N} \int \lambda_j |T(q)u_j|^p d\mu \right)^{1/p}, \\ \|q\|_3 &= \left(\sum_{j=0}^{N} \int \lambda_j |T_j(q)|^p d\mu \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Observemos que $\|\cdot\|_2$ se reduce a $\|\cdot\|_3$ cuando $U = I$. Además, de (4.2) y (4.8) concluimos que

$$C_1^{1/p} \|q\|_2 \leq \|q\|_1 \leq C_2^{1/p} \|q\|_2 , \qquad q \in \mathcal{P}. \tag{4.9}$$

Lema 4.1.2 *Para $1 < p < \infty$, $\|\cdot\|_2$, y $\|\cdot\|_3$ definen normas estrictamente convexas sobre $\mathcal{P}$.*

Demostración. $\|\cdot\|_3$ es un caso especial de $\|\cdot\|_2$, luego, basta que mostremos que esta última es una norma estrictamente convexa. Que $\|\cdot\|_2$ verifica la desigualdad triangular es consecuencia de la desigualdad de Minkowski; las otras propiedades de la norma son inmediatas. Notemos que

$$\|q\|_2 = \left(\sum_{k=0}^{N} \|T(q)u_j\|^p_{L^p(\lambda_j d\mu)} \right)^{1/p}.$$

Entonces, siguiendo los mismos argumentos empleados en el Lema 4.1.1, y teniendo en cuenta que la norma p sobre $\mathbb{C}^{N+1}$ es estrictamente convexa, concluimos que la norma $\|\cdot\|_2$ también lo es. □

Lema 4.1.3 *Supongamos que*

$$\lambda_j/\lambda_k \le C \quad \mu \text{ casi dondequiera}, \qquad 0 \le j,k \le N. \tag{4.10}$$

Entonces existen constantes positivas C_3, C_4, C_5, C_6, *tales que*

$$C_3\|q\|_3 \le \|q\|_2 \le C_4\|q\|_3\,, \qquad q \in \mathcal{P}, \tag{4.11}$$

y

$$C_5\|q\|_3 \le \|q\|_1 \le C_6\|q\|_3\,, \qquad q \in \mathcal{P}. \tag{4.12}$$

Siempre que se cumpla (4.10), diremos que la familia de medidas $\lambda_0 d\mu, \dots, \lambda_N d\mu$ está *totalmente dominada.*

Demostración. Ya conocemos (ver (4.9)) que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes, independientemente de (4.10). Por consiguiente, es suficiente probar (4.11). Probemos la primera desigualdad en (4.11), la segunda se obtiene de manera similar. Sea e_j el vector columna unitario con 1 en la j-ésima posición y 0 en las restantes. Sea $v_j = (u_{j,0}, \cdots, u_{j,N})^*$ la j-ésima columna de U^*. Como U es unitaria, v_j es el transpuesto conjugado de la j-ésima fila de U. Supongamos que $p > 1$, empleando la desigualdad de Hölder y (4.10), tenemos

$$\lambda_j |T_j(q)|^p = \lambda_j |T(q)e_j|^p = \lambda_j |T(q)Uv_j|^p = \lambda_j \left| \sum_{k=0}^{N} T(q)u_k \overline{u}_{j,k} \right|^p$$

$$\le \lambda_j \left(\sum_{k=0}^{N} |T(q)u_k|^p \right) \left(\sum_{k=0}^{N} |\overline{u}_{j,k}|^r \right)^{p/r} \le C(N+1)^{p/r} \sum_{k=0}^{N} \lambda_k |T(q)u_k|^p \tag{4.13}$$

μ casi dondequiera, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1$ (nótese que $|\overline{u}_{j,k}| \le 1$ μ casi dondequiera). Para $p = 1$ la desigualdad anterior es aún más fácil de obtener, con sólo la constante C en el miembro derecho. Por lo tanto,

$$\left(\sum_{j=0}^{N} \int \lambda_j |T_j(q)|^p d\mu \right)^{1/p} \le C^{1/p}(N+1)^{1/r} \left(\sum_{k=0}^{N} \int \lambda_k |T(q)u_k|^p d\mu \right)^{1/p}$$

como se requería. □

Junto con el Teorema 4.1, que constituye un resultado general sobre la acotación uniforme de ceros de sucesiones de polinomios extremales, los otros dos resultados básicos de esta sección, consecuencias directas de ese teorema, son los siguientes.

Teorema 4.2 *Sea* $T(q) = (q, q^{(1)}, \cdots, q^{(N)})$, *y supongamos que se cumple (4.10). Entonces el operador de multiplicación* M *está acotado sobre* $(\mathcal{P}, \|\cdot\|_3)$ *y, por consiguiente respecto a las normas* $\|\cdot\|_1$ *y* $\|\cdot\|_2$ *en* $\mathcal{P}$. *En los tres espacios los ceros de los polinomios extremales están uniformemente acotados.*

Demostración. La última afirmación es una consecuencia del Teorema 4.1. Por (4.9) y (4.11), las tres normas son equivalentes, por lo que es suficiente mostrar que el operador está acotado respecto a $\|\cdot\|_3$.

Notemos que

$$(zq)^{(j)} = zq^{(j)} + jq^{(j-1)}\,, \qquad j = 0, \cdots, N\,.$$

Por lo tanto,

$$\|zq\|_3 = \left(\sum_{j=0}^{N} \int \lambda_j |zq^{(j)} + jq^{(j-1)}|^p d\mu \right)^{1/p}$$

$$\leq 2^{(p-1)/p} \left(\sum_{j=0}^{N} \int \lambda_j (|zq^{(j)}|^p + j|q^{(j-1)}|^p) d\mu \right)^{1/p} \leq C_7 \|q\|_3,$$

donde $C_7 = (2^{p-1}(\|z\|^p_{\mathrm{S}(\mu)} + CN^p))^{1/p}$. En el último paso usamos (4.7), una cota para $|z|$ sobre $\mathrm{S}(\mu)$ y (4.10) para corregir la medida que multiplica a $|q^{(j-1)}|$. $\square$

Observemos que en la última desigualdad de la demostración del Teorema 4.2, sólo requerimos que las funciones λ_j sean secuencialmente dominadas. Cuando $U = I$, como $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_3$ coinciden, el Lema 4.1.3 no es necesario y por consiguiente, el teorema permanece válido bajo la suposición más débil de dominación secuencial.

Teorema 4.3 *Sea $T(q) = (T_0, T_1, \cdots, T_N)$, donde T_j, $j = 0, \cdots, N$, es el operador definido en (4.4), y supongamos que se cumple (4.10). Entonces el operador de multiplicación M está acotado sobre $(\mathcal{P}, \|\cdot\|_3)$ y, por consiguiente, respecto a las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ en $\mathcal{P}$. En los tres espacios los ceros de los polinomios extremales están uniformemente acotados.*

Demostración. Es fácil verificar que

$$\begin{aligned} T(zq) &= (T_0(zq), \ldots, T_N(zq)) \\ &= (zT_N(q), T_0(q), \cdots, T_{N-1}(q)). \end{aligned}$$

Luego,

$$\|zq\|_3 = \left(\int \lambda_0 |zT_N(q)|^p d\mu + \sum_{j=1}^{N} \int \lambda_j |T_{j-1}(q)|^p d\mu \right)^{1/p} \leq C_8 \|q\|_3,$$

donde C_8 es el producto de la constante C en (4.10) por el máximo entre la norma del supremo de $|z|$ sobre $\mathrm{S}(\mu)$ y 1. El resto de la demostración es una consecuencia directa del Teorema 4.1 y el Lema 4.1.3. $\square$

4.2. Distribución asintótica de ceros

En esta sección se estudia la distribución de ceros y la asintótica de la raíz enésima de los polinomios extremales para el caso considerado en el Teorema 4.2.

TEOREMA 4.4 *Supongamos que* $\lambda_0 d\mu \in \mathbf{Reg}$*,* $\mathrm{S}(\mu)$ *es un conjunto compacto regular respecto al problema de Dirichlet, se cumple (4.10),* $T(q) = (q, \cdots, q^{(N)})$ *, y* $\{q_n\}$*,* $n \in \mathbb{Z}_+$*, es la sucesión de polinomios extremales respecto a la norma* $\|\cdot\|_1$*. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \|q_n^{(j)}\|_{\mathrm{S}(\mu)}^{1/n} = \mathrm{C}(\mathrm{S}(\mu)), \qquad j \in \mathbb{Z}_+. \tag{4.14}$$

Además, si $\mathrm{S}(\mu)$ *tiene interior vacío y su complemento es conexo, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \nu(q_n^{(j)}) = \omega_{\mathrm{S}(\mu)}, \qquad j \in \mathbb{Z}_+, \tag{4.15}$$

*en la topología *-débil de medidas.*

Demostración. Sea T_n el n-ésimo polinomio mónico de Chebyshev de grado n respecto a $\mathrm{S}(\mu)$, y q_n el n-ésimo polinomio mónico extremal respecto a $\|\cdot\|_1$. Hagamos $d\nu = \lambda_0 d\mu$. Por la propiedad de extremalidad de q_n, (4.10) y (4.12), tenemos

$$\begin{aligned} C_5\|q_n\|_{L_p(\nu)} &\le C_5\|q_n\|_3 \le \|q_n\|_1 \le \|T_n\|_1 \le C_6\|T_n\|_3 \\ &\le (|\nu|(1+NC))^{1/p} C_6 \max_{0\le k\le N} \|T_n^{(k)}\|_{\mathrm{S}(\mu)}, \end{aligned} \tag{4.16}$$

donde $|\nu| = \nu(\mathrm{S}(\mu))$.

Sabemos que, ver (1.7), $\lim_{n\to\infty} \|T_n\|_{\mathrm{S}(\mu)}^{1/n} = \mathrm{C}(\mathrm{S}(\mu))$. Aplicando el Lema 1.3.1 a T_n, obtenemos que

$$\limsup_{n\to\infty} \|T_n^{(j)}\|_{\mathrm{S}(\mu)}^{1/n} \le \mathrm{C}(\mathrm{S}(\mu)), \qquad j \in \mathbb{Z}_+. \tag{4.17}$$

De (4.16) y (4.17), obtenemos

$$\limsup_{n\to\infty} \|q_n\|_{L^p(\nu)}^{1/n} \le \mathrm{C}(\mathrm{S}(\mu)).$$

Esto, junto con (1.9), implica

$$\limsup_{n\to\infty} \|q_n\|_{\mathrm{S}(\mu)}^{1/n} \le \mathrm{C}(\mathrm{S}(\mu)),$$

y haciendo uso nuevamente del Lema 1.3.1 , obtenemos

$$\limsup_{n\to\infty} \|q_n^{(j)}\|_{\mathrm{S}(\mu)}^{1/n} \le \mathrm{C}(\mathrm{S}(\mu)), \qquad j \in \mathbb{Z}_+ .$$

Por otro lado,

$$\liminf_{n\to\infty} \|q_n^{(j)}\|_{S(\mu)}^{1/n} \geq C(S(\mu)), \qquad j \in \mathbb{Z}_+,$$

pues esta última desigualdad se cumple para cualquier sucesión de polinomios, tal que *grad* $q_n = n$. Por lo tanto, obtenemos (4.14). Si $S(\mu)$ tiene interior vacío y complemento conexo, de acuerdo con el Corolario 1.3.1, (4.14) implica (4.15). Con esto concluimos la demostración. □

Observemos que de la demostración también se concluye que

$$\lim_{n\to\infty} \|q_n\|_1^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \|q_n\|_{L^p(\nu)}^{1/n} = C(S(\mu)).$$

Sea $g_\Omega(z;\infty)$ la función de Green para la componente no acotada Ω del complemento de $S(\mu)$ con singularidad logarítmica en ∞. Asumiremos que $S(\mu)$ es regular respecto al problema de Dirichlet. Entonces $g_\Omega(z;\infty)$ es continua hasta la frontera y la extendemos continuamente a todo $\mathbb{C}$, asignándole el valor cero sobre el complemento de Ω.

El siguiente teorema establece la asintótica de la raíz enésima de la sucesión de polinomios mónicos extremales respecto a $\|\cdot\|_1$ en el caso que nos ocupa.

Teorema 4.5 *Supongamos que* $\lambda_0 d\mu \in \mathbf{Reg}$, $S(\mu)$ *es un conjunto compacto regular respecto al problema de Dirichlet, se cumple (4.10),* $T(q) = (q, \cdots, q^{(N)})$, *y* $\{q_n\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, *es la sucesión de polinomios extremales respecto a* $\|\cdot\|_1$. *Entonces, para cada* $j \in \mathbb{Z}_+$

$$\limsup_{n\to\infty} |q_n^{(j)}(z)|^{1/n} \leq C(S(\mu))e^{g_\Omega(z;\infty)}, \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{4.18}$$

Además,

$$|q_n^{(j)}(z)|^{1/n} \rightrightarrows C(S(\mu))e^{g_\Omega(z;\infty)} \quad \text{en } \{z : |z| > 2\|M\|_1\} \cap \Omega. \tag{4.19}$$

Finalmente, si el interior de $S(\mu)$ *es vacío y su complemento conexo, tenemos igualdad en (4.18) cuasi dondequiera en* $\mathbb{C}$, $S(\omega_{S(\mu)}) \subset \{z : |z| \leq 2\|M\|_1\}$, *y*

$$\frac{q_n^{(j+1)}(z)}{nq_n^{(j)}(z)} \rightrightarrows \int \frac{d\omega_{S(\mu)}(x)}{z-x} \quad \text{en } \{z : |z| > 2\|M\|_1\}.$$

Demostración. Fijemos $j \in \mathbb{Z}_+$ y sea

$$v_n(z) = \frac{1}{n-j} \log \frac{|q_n^{(j)}(z)|}{\|q_n^{(j)}\|_{S(\mu)}} - g_\Omega(z;\infty).$$

Mostremos que

$$v_n(z) \leq 0, \quad z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}. \tag{4.20}$$

Esta función es subarmónica en $\Omega \cup \{\infty\}$ y sobre la frontera de Ω es menor o igual que cero. Por el principio del máximo para funciones subarmónicas, ella es menor o igual que cero sobre todo $\Omega \cup \{\infty\}$. Sobre el complemento de Ω, por el principio del máximo para funciones analíticas, tenemos que $|q_n^{(j)}(z)|/\|q_n^{(j)}\|_{\mathrm{S}(\mu)} \leq 0$ y por definición $g_\Omega(z,\infty) = 0$. Por consiguiente, se cumple (4.20). Tomando límite superior en (4.20) y haciendo uso de (4.14), obtenemos (4.18).

Por el Teorema 4.1, sabemos que para todo $n \in \mathbb{Z}_+$, los ceros de los polinomios extremales están contenidos en el disco $\{z : |z| \leq 2\|M\|_1\}$. Es bien conocido que los ceros de la derivada de un polinomio se encuentran en la envoltura convexa de los ceros del propio polinomio. Por consiguiente, para todo $j \in \mathbb{Z}_+$, los ceros de $q_n^{(j)}$ se encuentran en $\{z : |z| \leq 2\|M\|_1\}$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$. Luego, $\{v_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ constituye una sucesión de funciones armónicas en el dominio $\Omega' = \{z : |z| > 2\|M\|_1\} \cap (\Omega \cup \{\infty\})$, uniformemente acotada sobre cada subconjunto compacto de Ω'. Tomemos una sucesión de índices Λ tal que $\{v_n\}_{n\in\Lambda}$ converge uniformemente sobre cada subconjunto compacto de Ω'. Sea v_Λ su límite. Obviamente, v_Λ es armónica y menor o igual que cero en Ω'. Por (4.14), $v_\Lambda(\infty) = 0$. Por lo tanto, $v_\Lambda \equiv 0$ en Ω'. Como esto es cierto para toda subsucesión convergente de $\{v_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, concluimos que la propia sucesión converge a cero uniformemente sobre cada subconjunto compacto de Ω', lo cual equivale a (4.19).

Si el interior de $\mathrm{S}(\mu)$ es vacío y su complemento conexo, podemos usar (4.15). Las medidas $\nu_{n,j} = \nu(q_n^{(j)}), n \in \mathbb{Z}_+$, y $\omega_{\mathrm{S}(\mu)}$ tienen sus soportes contenidos en un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$. Haciendo uso de esto y de (4.15), de acuerdo al Teorema 1.8 obtenemos

$$\liminf_{n\to\infty} \int \log\frac{1}{|z-x|} d\nu_{n,j}(x) = \int \log\frac{1}{|z-x|} d\omega_{\mathrm{S}(\mu)}(x),$$

cuasi dondequiera en $\mathbb{C}$. Esto es equivalente a tener igualdad en (4.18) cuasi dondequiera, debido a que (ver (1.8))

$$g_\Omega(z;\infty) = \log\frac{1}{\mathrm{C}(\mathrm{S}(\mu))} - \int \log\frac{1}{|z-x|} d\omega_{\mathrm{S}(\mu)}(x).$$

Sean $x_{n,i}^j, i = 1, \cdots, n-j$, los $n-j$ ceros de $q_n^{(j)}$. Como indicamos anteriormente, todos estos ceros están contenidos en $\{z : |z| \leq 2\|M\|_1\}$. De (4.15) concluimos que cada punto de $\mathrm{S}(\mu)$ tiene que ser un punto límite de ceros de $\{q_n^{(j)}\}$; por lo tanto, $\mathrm{S}(\omega_{\mathrm{S}(\mu)}) \subset \{z : |z| \leq 2\|M\|_1\}$. Descomponiendo en fracciones simples y de acuerdo a la definición de $\nu_{n,j}$, obtenemos

$$\frac{q_n^{(j+1)}(z)}{nq_n^{(j)}(z)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-j}\frac{1}{z-x_{n,i}^j} = \frac{n-j}{n}\int\frac{1}{z-x}d\nu_{n,j}(x). \tag{4.21}$$

Por lo tanto, para cada $j \in \mathbb{Z}_+$ fijo, la familia de funciones

$$\left\{ \frac{q_n^{(j+1)}(z)}{n q_n^{(j)}(z)} \right\}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{4.22}$$

está uniformemente acotada sobre cada subconjunto compacto de $\{z : |z| > 2\|M\|_1\}$.

Por otro lado, todas las medidas $\nu_{n,j}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, están soportadas en el disco $\{z : |z| \leq 2\|M\|_1\}$ y para z fijo, con $|z| > 2\|M\|_1$, la función $(z-x)^{-1}$ es continua respecto a x sobre $\{x : |x| \leq 2\|M\|_1\}$. Por lo tanto, de (4.15) y (4.21), obtenemos que cualquier subsucesión de (4.22), uniformemente convergente sobre subconjuntos compactos de $\{z : |z| > 2\|M\|_1\}$, converge puntualmente a $\int (z-x)^{-1} d\omega_{\mathrm{S}(\mu)}(x)$. Luego, la propia sucesión converge uniformemente a esta función sobre subconjuntos compactos de $\{z : |z| > 2\|M\|_1\}$. Con esto finaliza la demostración. $\square$

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

A continuación resumimos los resultados fundamentales obtenidos, y planteamos algunos problemas abiertos que complementan los tratados en esta tesis.

En el capítulo 2 extendemos los resultados de [24] al caso en que las medidas involucradas en el producto interno de Sobolev están soportadas sobre subconjuntos compactos del plano complejo. Estos resultados aparecen publicados en [26].

- Presentamos una demostración elegante y simple (válida también para el caso de ortogonalidad estándar) de la acotación uniforme de los ceros de los polinomios ortogonales de Sobolev a partir de la acotación del operador de multiplicación, que mejora la cota obtenida en [24] para el caso real.

- Para el caso de productos internos con sólo dos medidas soportadas sobre subconjuntos compactos y disjuntos del eje real, obtenemos una condición suficiente para la acotación de los ceros de los polinomios ortogonales de Sobolev. Este resultado muestra que la dominación secuencial está lejos de dar una respuesta definitoria al problema de la localización de los ceros de los polinomios de Sobolev.

- Establecemos entonces, en el caso complejo, la distribución asintótica regular de ceros y el comportamiento asintótico de la raíz enésima de los polinomios ortogonales de Sobolev.

En el capítulo 3 extendemos los resultados de asintótica fuerte de [31], [32] y [5] a un producto interno de Sobolev que generaliza en cierto modo los productos considerados en estos trabajos. Estos resultados han sido sometidos sometidos para su publicación a la revista "Journal d'Analyse Mathematique".

- Obtenemos la asintótica de las normas de los polinomios ortogonales mónicos de Sobolev, lo cual juega un papel crucial en el establecimiento de la asintótica fuerte de dichos polinomios en el dominio exterior de la curva que contiene al soporte del producto interno.

- Obtenemos la asintótica fuerte de los polinomios ortogonales de Sobolev y de todas sus derivadas hasta el orden N inclusive. Concluimos que $\frac{1}{n^N} Q_n^{(N)}$ se comporta asintóticamente como L_{n-N}. Además, este comportamiento asintótico es independiente de los primeros N términos del producto interno.

- Del comportamiento asintótico de los polinomios de Sobolev derivamos la localización asintótica de sus ceros.

En el capítulo 4 extendemos los resultados obtenidos en el capítulo 2 al caso de sucesiones de polinomios extremales respecto a una norma dada sobre el espacio de los polinomios. Estos resultados aparecen publicados en [27].

- Extendemos el teorema sobre la acotación uniforme de los ceros de los polinomios ortogonales de Sobolev a partir de la acotación del operador de multiplicación al caso en que sobre el espacio de los polinomios se considera una norma arbitraria.

- Introducimos la noción de familia de medidas totalmente dominada, que permite garantizar la acotación uniforme de los ceros de la sucesión de polinomios extremales respecto a la norma considerada en este capítulo.

- Para dos casos particulares importantes (los de polinomios extremales respecto a normas que involucran derivadas y los extremales respecto a una norma vinculada a una familia de operadores que aparece en el estudio de sucesiones de polinomios sobre el eje real, que satisfacen relaciones de recurrencia de orden superior) demostramos la acotación de los ceros de los correspondientes polinomios extremales.

- Para el caso de polinomios extremales respecto a una norma que involucra derivadas, obtenemos la distribución asintótica regular de ceros y el comportamiento asintótico de la raíz enésima de los mismos.

Finalizamos este trabajo proponiendo algunos problemas abiertos.

1. Siendo el producto interno considerado en el capítulo 2 de soporte compacto ¿están acotados uniformemente los ceros de la sucesión de polinomios ortogonales de Sobolev? Si es cierto, obtener una cota lo más precisa posible para el radio del disco que los contiene. Si es falso, dar un ejemplo.

2. Es conocido (ver [6]) que la acotación uniforme de los ceros de polinomios de Sobolev no implica la acotación del operador de multiplicación ¿qué condición más débil resulta necesaria y suficiente para la acotación uniforme de los ceros en el caso de productos de Sobolev con soporte compacto?

3. Obtener condiciones generales bajo las cuales tenga lugar la asintótica de la raíz enésima para productos de Sobolev cuando los soportes de las medidas que lo definen no tiene un orden de inclusión jerárquico.

4. No existe ningún resultado general sobre el comportamiento asintótico para productos de Sobolev cuyas medidas están soportadas en conjuntos no acotados. Estudiar la asintótica reescalada de polinomios ortogonales de Sobolev asociados a medidas con soporte no acotado pertenecientes a una clase lo suficientemente general.

5. En [31] se obtuvieron los primeros resultados de carácter general sobre el comportamiento asintótico fuerte de polinomios de Sobolev para un producto con sólo dos medidas

$$\langle p, q\rangle_S = \int_\Gamma p(\xi)\overline{q(\xi)}d\mu_0(\xi) + \int_\Gamma p'(\xi)\overline{q'(\xi)}d\mu_1(\xi),$$

donde Γ es un arco o curva cerrada de Jordan suave y μ_0 y μ_1 pertenecen a la clase de *Szegö*. Existen indicios suficientes que sugieren que las condiciones sobre la medida μ_0 se pueden debilitar.
Sea μ_1 una medida de la clase de *Szegö* sobre un arco o curva de Jordan suave Γ y μ_0 una medida arbitraria soportada sobre Γ. Demostrar que los resultados de [31] siguen teniendo lugar.

6. Cuando entre los soportes de μ_0 y μ_1 en el producto interno anterior no existe un orden de inclusión, el problema resulta ser más complejo. Estudiar el comportamiento asintótico de la sucesión de polinomios ortogonales Q_n cuando $\mathrm{S}(\mu_0) \not\subset \mathrm{S}(\mu_1)$.

7. No existen resultados específicos para la asintótica del cociente, salvo en el caso en que se tiene asintótica fuerte. Obtener condiciones necesarias y/o suficientes que garanticen la asintótica del cociente de polinomios de Sobolev sin que tenga que cumplirse la asintótica fuerte.

Bibliografía

[1] N. I. Akhiezer and I. M. Glazman, *Theory of Linear Operators in Hilbert Space*, Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1978.

[2] P. Althammer, Eine Erweiterung des Ortogonalitätsbegriffes bei Polynomen und deren Anwendung auf die beste Approximation, *J. Reine Angew. Math.,* **211** (1962) 192-204.

[3] V. Alvarez, D. Pestana, J. M. Rodriguez and E. Romera, Weighted Sobolev spaces on curves, *J. Approx. Theory,* **119** (2002), 41-85.

[4] P. Borwein and T. Erdelyi, *Polynomials and Polynomial Inequalities*, Graduate Texts in Math. 161, Springer Verlag, New York, 1995.

[5] A. Branquinho, A. Foulquié, and F. Marcellán, Asymptotic behavior of Sobolev-type orthogonal polynomials on a rectifiable Jordan curve or arc, *Constr. Approx.,* **18** (2002), 161-182.

[6] M. Castro and A. J. Duran, Boundedness properties for Sobolev inner products, *J. Approx. Theory,* **122** (2003), 97-111.

[7] E. W. Cheney, *Introduction to Approximation Theory*, 2nd. Ed., A. M. S. Chelsea, Providence, R. I., 2000.

[8] E. A. Cohen, Zero distribution and behavior of orthogonal polynomials in the Sobolev space $W^{1,2}[-1,1]$, *SIAM J. Math. Anal.,* **6(1)** (1975), 105-116.

[9] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear Operators*, Volume II. Spectral Theory. Self Adjoint operators in Hilbert space. Interscience, New York, 1983.

[10] A. J. Duran, On orthogonal polynomials with respect to a positive definite matrix of measures, *Canad. J. Math.,* **47** (1995), 88-112.

[11] A. Duran and W. Van Assche, Orthogonal matrix polynomials and higher order recurrence relations, *Linear Algebra Appl.,* **219** (1995), 261-280.

[12] A. Duran and E. Saff, Zero location for nonstandard orthogonal polynomials, *J. Approx. Theory,* **113** (2001), 127-141.

[13] P. Duren, *Theory of H^p spaces*, volume 38 in Pure and Applied Mathematics, Academic Press, New York, 1970.

[14] W. D. Evans, L. L. Littlejohn, F. Marcellán, C. Markett and A. Ronveaux, On recurrence relations for Sobolev orthogonal polynomials, *SIAM J. Math. Anal.,* **26(2)** (1995), 446-467.

[15] A. Foulquié, and F. Marcellán and K. Pan, Asymptotic behavior of Sobolev-type orthogonal polynomials on the unit circle, *J. Approx. Theory,* **100** (1999), 345-363.

[16] W. Gautschi and A.B.J. Kuijlaars, Zeros and critical points of Sobolev orthogonal polynomials, *J. Approx. Theory,* **91** (1997), 117–137.

[17] J. S. Geronimo, D. S. Lubinsky, and F. Marcellán, Asymptotics for Sobolev Orthogonal Polynomials for Exponential Weights, *Constr. Approx.* In press.

[18] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Polya, *Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge, 1934.

[19] V.A. Kaliaguine and R. Benzine, Sur le formule asymptotique des polynomes orthogonaux associés à une measure concentré sur un contour plus une partie discrète finie, *Bull. Soc. Math. Belg. Ser. B,* **41** (1989), 29-46.

[20] V. A. Kaliaguine, On Asymptotics of L^p Extremal Polynomials on a Complex Curve $(0 < p < \infty)$, *J. Approx. Theory,* **74** (1993), 226-236.

[21] V. A. Kaliaguine, A Note on the Asymptotics of Orthogonal Polynomials on a Complex Arc: The Case of a Measure with a Discrete Part, *J. Approx. Theory,* **80** (1995), 138-145.

[22] D. C. Lewis, Polynomial least square approximations, *Amer. J. Math.,* **69** (1947), 273-278.

[23] G. López Lagomasino, F. Marcellán and W. Van Assche, Relative asymptotics for polynomials orthogonal with respect to a discrete Sobolev inner product, *Constr. Approx.,* **11** (1995), 107-137.

[24] G. López Lagomasino and H. Pijeira, Zero location and n-th root asymptotics of Sobolev orthogonal polynomials, *J. Approx. Theory,* **99** (1999), 30-43.

[25] G. López Lagomasino and H. Pijeira, *Polinomios Ortogonales*, XIV Escuela Venezolana de Matemáticas 2001, Facultad de Ciencias, Universidad de los Andes, Mérida, Venezuela.

[26] G. López Lagomasino, H. Pijeira, and I. Pérez, Sobolev orthogonal polynomials in the complex plane, *J. Comput. Appl. Math.,* **127** (2001), 219-230.

[27] G. López Lagomasino, I. Pérez, and H. Pijeira, Asymptotic of extremal polynomials in the complex plane, *J. Approx. Theory,* **137** (2005), 226-237.

[28] F. Marcellán and W. Van Assche, Relative asymptotics for orthogonal polynomials with a Sobolev inner product, *J. Approx. Theory,* **72** (1993), 193-209.

[29] F. Marcellán, M. Alfaro, and M. L. Rezola,Orthogonal polynomials on Sobolev spaces: old and new directions, *J. Comput. Appl. Math.,* **48** (1993), 113-132.

[30] A. Martínez Finkelshtein, Asymptotic properties of Sobolev orthogonal polynomials. *J. Comput. Appl. Math.,* **99** (1998), 491-510.

[31] A. Martínez Finkelshtein, Bernstein-Szegő's theorem for Sobolev orthogonal polynomials, *Constr. Approx.,* **16** (2000), 73-84.

[32] A. Martínez and H. Pijeira , Strong Asymptotics for Sobolev Orthogonal Polynomials, *J. D'An. Math.,* **78** (1999), 143-156.

[33] A. Martínez Finkelshtein, Analytic aspects of Sobolev orthogonal polynomials revisited, *J. Comput. Appl. Math.,* **127** (2001), 255-266.

[34] H. G. Meijer, A short history of Sobolev orthogonal polynomials in a Sobolev space I. The non-discrete case, *Nieuw Arch. Wisk.,* **14** (1996), 93-113.

[35] G. V. Milovanovic, D. S. Mitrinovic, and D. Th. M. Rassias, *Topics in Polynomials: extremal, inequalities, zeros*, World Scientific, Singapore, 1994.

[36] H. E. Pijeira, Teoría de Momentos y Propiedades Asintóticas para polinomios ortogonales de Sobolev, Tesis Doctoral, Universidad Carlos III de Madrid. 1998.

[37] C. Pommerenke, *Boundary behaviour of conformal maps*, Springer Verlag, Berlin, 1992.

[38] J.M. Rodríguez, V. Alvarez, E. Romera and D. Pestana, Generalized weighted Sobolev spaces and applications to Sobolev orthogonal polynomials II, preprint.

[39] J. M. Rodríguez , The multiplication operator in Sobolev spaces with respect to measures, *J. Approx. Theory,* **109** (2001), 157–197.

[40] T. Ransford, *Potential Theory in the Complex Plane*, London Mathematical Society, Student Texts 28, Cambridge Univ. Press, 1995.

[41] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, Mc Graw-Hill, New York, 1966.

[42] E. B. Saff, Orthogonal polynomials from a complex perspective, in *Orthogonal Polynomials*, P. Nevai (Ed.), 363-393, 1990, Kluwer Academic Publishers.

[43] E. B. Saff and V. Totik, *Logarithmic Potentials with External Fields*, Grundlehren der matematischen Wissenschanfen 316, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[44] H. Stahl and V. Totik, *General Orthogonal Polynomials*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.

[45] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 23, fourth edition, 1975.

[46] W. Van Assche, Constructive Methods in the Analysis of Orthogonal Polynomials, Katholieke Universiteit Leuven, 1992.

[47] W. Van Assche, Orthogonal polynomials in the complex plane and on the real line, *Fields Institute Comm.,* **14** (1997), 211-245.

[48] H. Widom, Extremal polynomials associated with a system of curves in the complex plane, *Adv. Math.,* **3** (1969), 127-232.